國　　立　　臺　　南　　大　　學
「教育研究學報」第41卷第2期（民國96年）：19～47

高中教師與學生的論證文本判讀策略之比較

葉明達
高雄市立新莊高中

林冠群
輔英科技大學科學教育中心

柳　賢
高雄師範大學數學系

摘　要

當前數學教育改革呼籲學校課程重視推理與證明，本研究比較高中教師、高中生在「論證判讀」歷程中所使用策略的種類與品質，研究對象為四位高中教師及四位高二學生，採個案研究法，先讓學生以放聲思考判讀四種論證文本，再就學生所使用的判讀策略進行晤談。主要發現如下：1.專用於數學學科的判讀策略共有11種，亦可用於其他學科的判讀策略有6種，部分策略是因應數學文本的特質而出現，單從閱讀理解的角度來詮釋相同名稱的判讀策略是不充分的；2.高中教師、高中生的判讀策略種類部分相同，但策略使用品質並不一致。高中教師會主動或因應判讀困難而啟動巨觀層面的判讀策略，並在巨觀及微觀層面間交替運作，有助於掌握證明的方向；反之，高中生的判讀策略往往專注於微觀層面，侷限於各行順序而直線進行，常訴諸於直覺的臆測，或受到無關訊息的干擾。

關鍵詞：判讀、判讀策略、數學證明

壹、緒論

Schoenfeld（1994）認為證明不能如同數學課程的安排方式從數學中抽離，證明是做、溝通、和記錄數學的一項根本成分，數學證明在數學的重要性可見一斑。美國數學教師協會（National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000）頒布的《學校數學課程的原則和標準》（Principles and Standards for School Mathematics），呼籲將「學習推理」與「構建證明」當成「理解數學」的一部份，並且建議讓幼稚園之前到12年級的學生都能夠：「1.體認推理與證明為數學中必需且重要的部分；2.提出猜測並考察數學猜測；3.發展並評價數學論證與證明；4.選擇並使用各種適當的推理形式和證明方法」。顯見，數學證明的構建與評價已成為數學教育的新訴求。

理解證明是判讀的最終目標，閱讀後知道該論證文本的意涵，卻不能分辨該論證文本是否「證出」待證命題，不能稱之為「理解」該證明，因此「閱讀」是「判讀」的基礎，但數學證明的學習需要的不只是閱讀，更要能判讀證明的有效性。從終身學習的角度，培養學生的論證判讀能力有助於學生自學數學證明。在「一綱多本」的課程規劃下，研究者曾使用四種以上的數學版本教科書從事高中數學教學，發現各出版商改版頻繁，錯誤率較過往「國立編譯館版本」更高，學生常常要判讀教科書或參考書上的證明是否正確。因此，論證判讀能力的培養實有其教育價值與實際需求。

以往數學證明的教育研究集中在數學證明的構建，論證判讀多被用來分析構建者的證明概念，常見研究方式不是晤談，便是使用紙筆測驗，探討學生的論證接受是否有特定偏好，目的在發掘學生的錯誤證明概念，以改進證明構建能力（e.g., Healy& Hoyles, 1998）。少數探討論證判讀的研究依據學生的自我報告來區分其接受判準，對於判讀策略則避而不談，窄化了「論證判讀」的實際意義（e.g., Reid, 2002; Segal, 2000）；另一些研究雖提及判讀的策略，卻出自於大學生的自我報告，其證據力略嫌薄弱，亦未針對不同社群的使用策略類型進行比較（e.g., Selden & Selden, 2003）。

Flick與Lederman（2002）倡言數學文本閱讀的教學價值，認為因應數學文本在形式、結構與目的特殊性，需要不同於閱讀小說的技能，政府的閱讀評鑑政策應重視發展特定主題的文本閱讀策略。認知心理學常以專家、生手進行比較，以瞭解專家之所以為專家的原因，再將所探討出專業內涵的內容、形式與形成過程，教導給生手（Johnson,1988; Kay & Black,1990）。論證的接受與何謂證明標準有關，為避免不同社群的判讀者可能有不同的證明標準，本研究將之鎖定在高中數學教育社群中之專家與生手。故本研究目的為透過原案分析、晤談等方式，就高中教師、高中生之判讀策略的種類與品質進行比較，以提供未來比較其他社群之判讀策略、數學證明課程規劃與判讀策略教學的參考。

貳、文獻探討

以下先就論證判讀的意義、閱讀理解的策略、論證判讀的策略、專家、生手研究的重要性加以闡述，其次，再界定判讀策略的分類架構，以作為本研究之基礎：

一、論證判讀的意義

Duval（1992）主張「證明的結構」可用三部份來描述：資料、宣稱、和推論規則。各部份由一個重複使用的過程所連結：上一步的結論是下一步的輸入條件。因此，Duval將證明當成「一種

連續不斷的論證過程」。Douek（1999）將證明簡化為邏輯計算，故一般的數學證明可當成數學論證的一種特例。本研究將「論點」界定為提供支持或反對「待證命題」的理由，一個或一個以上邏輯相關論點構成「論證」，「數學論證」是產生數學證明過程的暫時產物。本研究之數學論證係研究者收集高二學生為證明特定數學命題所寫下的書面證明，但其論證過程與論點可能是錯誤的。

鄭毓信（民87）表示數學家的創造性工作只有獲得社群接受，才能真正成為數學知識的一部份。最明顯的例子就是，數學家必須在學術刊物或學術會議上發表研究成果，以期取得他人的理解和評價。有了書面文本後，可廣為徵求他人之建議，發現缺失與困難，進而設法解決。因此本研究將文本經閱讀後，判斷其有效性，簡稱為「論證判讀」。葉明達與柳賢（民95；民96）認為判讀不僅在詮釋、解讀作者的意念，也需要偵錯與修改，使論證的思路順暢。最後，縱使完全理解論證文本，仍需檢驗該論證文本是否與「待證命題」相配合，凡此種種，均需要有效能的策略相配合。論證判讀是經由閱讀數學論證文本，來判定該文本是否為有效的數學證明。判讀歷程所出現的策略，可能與一般語文閱讀理解策略部分相同。因此有必要先考察文獻中一般語文的閱讀理解策略。

二、一般語文閱讀理解的策略

閱讀理解策略是讀者因應文章的類型與閱讀的目的彈性地調整其閱讀方法，以達到理解的效果。閱讀策略的研究有兩種不同的取向：（一）依據閱讀的階段來界定；（二）依據策略的性質來劃分（林建平，民83；郭靜姿，民81；劉雅筑，民89）。

Forrest-Pressley 與Gillies（1983）依據閱讀階段提出不同的閱讀策略：

1.解碼階段：當讀者無法辨識出單字時，可使用「查字典」、「詢問他人」、「對照上下文意」、「略過」等策略。
2.文意理解階段：當無法了解字句的意義時，使用的方法包括：在「難字句下劃線」、「分析句子結構」、「統整各單字組合後的意義」、「對照上下文推敲字句的意義」、「略過」等；而當無法了解文章的意義時，使用策略包括：「重新瀏覽全文」、「劃重點」、「分段閱讀」、「自問自答」、「作摘要」、「分析文章架構」等。
3.推論理解階段：使用先前知識來幫助理解，檢討文章立論的正確性及一貫性、批判文章的內涵、作新的聯想及推論等。
4.理解監控階段：個人為了覺知自己理解的狀態，可以採用「自我評估」的方式，確認自己理解程度，並依結果「自我調整」。

Chamot et al.（1993）則以策略的性質區分閱讀策略：

1.認知策略：涉及與文章的交互作用，運用特殊的技術來理解文章，可使用：（1）「複述」：以字或詞為串節（chunk）來複誦、記憶。（2）「運用資源」：使用字典、工具書等來幫助理解。（3）「畫底線」：在重點的文句下劃線。（4）「做筆記」：以圖示或要點提示。（5）「精緻化」：連結新的訊息到個體既有知識，使這訊息與個人做有意義的聯結。精緻化策略包括：心像、提問回答、釋義、創造類比、摘要、推論。
2.後設認知策略：思考閱讀的過程，計畫、監控閱讀的目標並評鑑所學的結果。（1）「計畫」：預覽文章的綱要或前導組體，並提出閱讀的目標及所使用的策略。（2）「自我監控」：檢查、確認或校正自己閱讀理解表現，此包括對計畫的監控、策略的監控及理解的監控。（3）「問題的確認」：明確鑑別問題所在，並知道如何解決問題。（4）「自我調整」：當閱讀發現理解失敗時能採取補救的措施，包括調整閱讀速率、再讀一遍。
3.社會或情意策略：涉及他人的交互作用來幫忙，或使用情感的控制來協助達到閱讀理解，包括詢問他人、自我增強等。

綜上所述，無論是依據策略性質或閱讀階段的分類方式，學者所提出的閱讀策略極為相同。閱讀策略主要可以分為兩類，一類是為了達到閱讀理解而採用的「認知策略」，例如做重點畫記、訊息聯想、摘要大意、對上下文；另一類則是為了覺知自己理解狀態所採行的「後設認知策略」，如自我評估、自問自答、重新閱讀、自我調整等主動執行和監控的歷程。至於情意策略，則為未來研究可考慮的方向，本研究較不觸及。

三、論證判讀的策略

至於論證判讀可能有哪些策略呢？由於論證判讀為全新的研究領域，國內外的相關研究極少。數學家Bonsall（1982）認為在檢驗證明有效性的方式上，有些人耐心地「逐行檢查」；另一些人靠「檢驗幾個例子，靠經驗及直觀來檢查決定性步驟」。書面可能完全正確，但還是沒有證明到定理，最好的驗證應是兩種方法並用。數教學者Selden 與Selden（1999）指出數學家為了檢查證明的有效性而讀，與讀報紙或書不同。閱讀過程中，數學家「評估宣稱」、「推斷」、「提問和回答問題」，「引入外部知識」、「構建視覺圖像」、或「發展子證明（subproofs）」。整個證明也可能被重建，甚至使用個人特定領域知識來增補。證明從開始到結束被多次回顧，數學家也可能「產生一個包含在單一思路內的簡化版本」。

Bonsall從個人經驗的反思，提出論證判讀的策略，Selden與Selden則訪問數學家來簡述數學社群的判讀策略。國內學生在真實的判讀情境下會使用哪些策略？閱讀理解策略是否足以應付判讀所需？均值得進一步探討。無疑地，判讀歷程的運作，不可能不涉及閱讀，為彰顯數學論證判讀本身的學科特性，研究者將判讀策略分為「領域一般（domain general）」（一般閱讀理解也會使用）及「領域特定（domain specific）」（專屬於數學論證判讀）的策略，以此作為分析判讀策略之參考。

四、專家、生手研究的重要性

認知心理學家常使用「專家－生手模式」（expert-novice paradigm）來研究構成某特定領域的專業知能（expertise）。此模式中，研究人員會在某特定領域中指定一組專家與一組生手，然後讓兩組處理同樣的問題，可能會運用放聲思考說出他們正在思考的東西，或要求受試者以回溯報告（retrospective reports）的方式去回憶他們所處理的問題，運用「專家－生手模式」比較認知運作歷程的差異，有助於確認構成特定領域專業知能的成分，並對於特定領域之教學內容的規劃提供必要的訊息（Gagné, Yekoovich, & Yekovich, 1993）。

Balacheff（1987）認為「證明是一個特定社群在某一特定時間所接受的解釋」。雖然判讀並非特定教學單元，但碩士生（兼為高中教師）在批閱高中生證明題試卷，及撰寫數學碩士論文時，已有相當多的論證判讀經驗，對比於剛接觸判讀活動的高中生，可為「相對性」的專家與生手關係，研究者期望從探討高中生的學習為起點，累積初步的研究成果後，再進一步探討不同學習階段或數學程度者的判讀策略。因此本研究只就碩士生與高中生的判讀策略進行比較。期望在重新掌握「判讀」的意義與改進研究方法的設計後，對高中生的數學證明學習也可以產生新的領悟。

參、研究方法

Krathwohl（1998）主張質性研究適用於：1.當新的研究主題，已有的研究為數稀少或所知有限，研究的意向以試探發現為主，而不在證實或檢證；2.對所要研究的主題尚未有可靠、正確、有效的測量工具可資應用時。由於判讀策略的研究極少，也沒有發展出可資應用的研究工具，故本研究採用質性研究為宜。為瞭解個案在研究者所設計的判讀情境中，使用哪些策略來判讀論證文本，並詳實描述本研究如何探查個案的判讀策略。以下，研究者就自己、研究樣本、研究工具、研究程序、資料分析之方式進行詳細說明，以提供讀者對本研究發現的信心，並建立本研究之信效度。

一、研究者背景

研究者R_1從師範大學數學系畢業後，擔任國中、高中數學教師已十一年，有感於在數學證明單元時，學生在傳統寫作評量的回收卷空白率偏高，比其他非證明教學單元呈現更高比例的「自我放棄」現象，深覺有必要為傳統的數學證明教學方式提供另類的教學思維。體察國際間數學證明教學研究趨勢的轉變，啟發研究者對將「論證判讀」引入課室教學的想法，為對論證判讀教學課程的預作規劃，有必要先瞭解有哪些判讀策略類型。至於研究者 R_2則為數學教育博士，現為科技大學副教授，在本研究扮演資料分析之三角校正的角色，研究者 R_3為師範大學數學系榮譽教授，在本研究擔任研究工具的評閱與修改。

二、研究樣本

由於現行數學證明課程主要在國三與高一，考量學生的知識背景，及聯考的可能干擾後，採立意取樣，研究樣本以高二學生為宜。高中生樣本選自高雄市聯招排名中上的某公立高中二年級學生，經任課老師的推薦，排除不能適應邊想邊說的學生，合計選取配合度高、表達能力佳的高二男、女生各兩名（LM1、LM2、LF1、LF2），為取得最真實的資料，研究者平日便藉由每週五留校指導學生課業的機會，與學生建立信任和合作的關係，並請任課老師鼓勵其參加本研究。高中教師樣本目前均任教於高雄地區公立高中職，包含數學研究所碩士男、女生各兩名（GM1、GM2、GF1、GF2），與研究者R_1熟識多年。在判讀經驗上，高中生過去並未從事判讀活動，高中教師則在批改高中生試卷及撰寫數學論文上，有較豐富的判讀經驗。為提高本研究之外在效度，研究者透過提供豐富而詳細的描述，以改善研究結果的可推論性，相關背景資料如表1：

表1 個案背景資料一覽表

組別	代號	性別	樣本描述
高中生	LF1	女	「目前沒有補數學，但學校老師教的我聽不懂，因為節奏跟不上，只能抄算式，考試時才看，有些很煩，就不想理它。我判讀時，看東西很快，就看每一行順不順，沒有重讀第二次，除非這一行看不懂，才回到上一行」。（表面散散的，下課不懂會問，常把「不會、不想算」當口頭禪，常反映學校上課的進度太快，常問剛教過的東西，下課時會與同學討論）。〈個性非常活潑，但在正式研究時，有時會對時間過長顯得不耐〉。
	LF2	女	「數學考得最差，有最大的挫敗感。不喜歡數學證明，因為很麻煩，會花很多時間」。（母親為特教老師，父母為其請數學家教。上課沒在聽課，只算自己的，覺得自己都懂了，很愛看漫畫，喜歡幻想，很用功，但方法不是很正確，常常習作的習題做好幾次，也只能求六十分）。〈配合度很高，常常把對不起掛在口中，缺乏自信〉。
	LM1	男	「姊姊常常教自己數學，國中數學很好，最喜歡的科目是數學，每解出一題，就會有成就感，也刺激我去想方法解問題。為了適應學測與大考的題型，又能把學校的再複習一遍，我有補習數學」。（上課很專心、很快樂，想得到老師的歡心，喜歡回答問題）。
	LM2	男	「數學都是數字很煩。我不喜歡證明的單元，要想很久。因為數學差，父母要我去補數學，平常準備小考時，用看的讀數學，準備月考時，則會做題目」。（學習太消極，注意力差，不愛講話，會放棄補考機會，上課只是靜靜坐著，連筆記都沒抄）。〈個性內向，非常沒有自信〉。
高中老師	GF1	女	「教學年資三年，小時候因同學父親教珠算而參加，並對數學產生有興趣，應家人期望選填師大數學系，因考上研究所，故師大數學研究所碩士畢業後，才開始教書，先任教於國立高中兩年，後任教於南部某公立高工一年」。〈口述速度較慢，個性細心〉。
	GF2	女	「教學年資八年，對數學有興趣，私立大學數學系畢業後，先在國中代課一年，讀師大數學所，在高工代課抵實習一年，轉到完全中學任教六年，認為國中時遇到的數學老師很好，所以喜歡數學。考研究所是想要當老師，代課前不知道自己適合當老師，代課後就立定自向」。〈很有耐心，能詳盡的敘述自己的想法〉。
	GM1	男	「教學年資八年，小學讀資優班，因此覺得國中數學很簡單，但高中課程中相較之下，認為高中數學學得較好，師範大學數學系畢業後，分發到屏東國中任教一年，退伍後到高雄完全中學國中任教一年，就讀師大數學研究所碩士，轉任高中部教師兼教學組長」。〈個性活潑，說話速度很快，晚上的時間都在家教與學校的推廣教育課程授課〉。
	GM2	男	「教學年資八年，小學就決定志向讀數學，私立大學數學系畢業，想當老師故就讀師大數學所，在私立高中三年後，到國立高中任教五年」。〈能很詳細說出自己的觀點，家教經驗很多，也曾開設小組補習班，對高中數學課程很有研究〉。

註：「 」表示個案的自述；（ ）表示該生教師之描述；〈〉表示研究者的觀察結果。

三、研究工具

（一）論證判讀評量工具

1. 證題的選擇

摘錄書本的證明來使用，雖有其便利性，但論述全然正確，可供質疑的論點不多；其次，若學生能指出課本證明是正確的，或寫出該證明，並不能排除是過去記憶的成果。相較之下，學生寫的論證文本，常常隱含某些錯誤，可為判讀策略的誘發點，亦較符合數學社群判讀同儕所寫證明之真實情形（葉明達與柳賢，民93）。為避免文本的知識需求遠超過學生的知識背景，以致判讀結果淪為無根據的臆測。因此依據中學課程單元的分布及與兩位資深高中教師討論後，配合高二學生的知識背景，一致認為高中二年級之前的數學證明涵蓋「數論」（高一上「數學歸納法」）與「幾何」（國三下「幾何證明」、高一下「三角函數」）兩種領域，故證題取材以此兩領域為宜。

2. 文本的組織

證題分為數論證題「設 u, v 為正整數，若u^2+uv+v^2能被9整除，則u與v都能被3整除」及幾何證題「若正方形ABCD中，M是$\overline{CD}$的中點，$\angle BAE=2\angle DAM$，則$\overline{AE}=\overline{BC}+\overline{CE}$」（見附錄）。論證文本的收集採「理論抽樣」（theoretical sampling），利用逐步浮現與持續比較法獲取最大變異樣本（徐宗國譯，民86）。先以台灣南部某公立高中高二學生八個班級為對象，進行兩道證題的施測，從回收的證明題答案中，透過持續比較、分類等方式，找出具代表性文本。並邀請四位資深高中數學教師實際判讀論證文本，指出判讀的關鍵點，再經數學系教授評閱修改而成，以作為「數學論證文本」。

表2　論證判讀評量工具的文本組織表

文本	證法	判讀關鍵點	資深教師的評價
數論甲	數學歸納法	評估證法的適用性、摘要論點的意義	無效文本
數論乙	直接證法	重新排列各行的順序、修正局部論點	有效文本
幾何丙	輔助線	判斷輔助線的合理性、評估局部論點的關連性	無效文本
幾何丁	解析證法	憶取三角函數知識、指出隱匿前提、修訂錯誤	有效文本

3.工具的信效度

本評量工具中的「讀本」係由「待證原題」（數學命題）與「論證文本」（數學證明）所組成，證題選自高中、國中的數學競試集。數論證題需使用高一所教的「反證法」，幾何證題則使用輔助線解題，對受試者均極具挑戰性，可藉此觀察受試者的證明能力與相關知識背景；至於論證文本係收集高中生所寫的數學證明，研究者在收集部分文本後，先以一位高三學生初步測試（pilot research）認為文本的特性與脈絡可能會影響判讀者採用不同的判讀策略，為增加本研究結果的內在信效度與外在效度，在工具設計之初，考慮到高二學生學過證明課程範圍以「數論」及「幾何」證明為主；又因研究動機在將數學社群的判讀活動融入教學，但數學家同儕所撰寫的論證文本可能「有效」或「無效」，故本工具設計上考量「文本領域性」、「文本有效性」兩向度。研究者在完成工具初稿後，即交由兩位高中數學教師重新審視（如表3），以判斷研究者主張之合理性，排除超出受試者先備知識或不具誘答性的文本，若有意見相左之處，則以溝通協商以達成意見之一致。最後經一位協同研究者數學系教授R_3評閱修改而成，因此應具專家效度及內容效度。本文並在研究結果中就學生在數論與幾何文本、有效與無效文本之判讀策略進行比較，以檢視本研究設計是否達成預期成效。

表3 研究工具三角校正考驗之舉例

文本	甲	資深教師或協同研究者的評價
領域	數論	■同意 □不同意 □其他意見
證法	數學歸納法	■同意 □不同意 □其他意見
判讀關鍵點	評估證法的適用性、摘要論點的意義	■同意 □不同意 □其他意見
有效性	無效文本	■同意 □不同意 □其他意見

（二）判讀策略的評分架構

「判讀策略的評分架構」用於分析學生的判讀策略的適切性。由兩位研究者經由持續比較的方式，將個案的判讀策略進行編碼，再針對該策略對判讀結果的影響，將之分為三類：「◎」表示策略合理、「○」表示策略合理但不適當、「●」表示策略不合理，並提出該項判斷的理由。

為求判讀策略評分的客觀性，由協同研究者R_2為擔任評分員，進行「評分者間信度」（inter-rater reliability）考驗，也使用「評分者內信度」（intra-rater reliability）考驗研究者第一次及第二次間隔一個月的分析結果是否具有一致性。由評分員R_2隨機選取一名個案的四個原案進行策略劃分與評分。其方式是就原案中每一策略，評分者可從策略代號中，選擇一個細項填入，並就該策略對判讀結果的影響加以評分，以評分者信度公式$=\dfrac{\text{一致的次數}}{\text{一致的次數}+\text{不一致的次數}}$加以考驗。結果顯示策略劃分的評分者間信度為0.85，評分者內信度為0.92，策略合理性的評分者間信度為0.89，評分者內信度為0.95，因此具有相當信度。

三、研究程序

正式施測分成「數論文本」與「幾何文本」兩階段，每階段分為三步驟：1.要求學生寫下某一數學命題的證明；2.依序展示該命題的兩種論證文本，要求學生以放聲思考判斷它是否算是數學證明，能否取信自己或老師，並寫出其判斷依據；3.藉由半結構式晤談，確認學生在判讀論證文本時的判讀策略。

四、資料分析

研究者以原案為依據，對照筆試試卷、錄影帶、晤談資料，將判讀者的行為做詳細分析。茲分述如下：

（一）原案產生

判讀活動施測結束後，研究者將紀錄受試者判讀歷程的DV帶轉錄成文字，再配合DV帶與受試者的筆答和晤談資料，將受試者的行為詮釋登錄於一旁，形成原案。原案轉錄的規則如下：1.以判讀者代號為開頭，如LF1：表示判讀者LF1的陳述，以R：代表研究者的陳述。2.忠實抄錄每一字、每一句。

（二）判讀策略的界定

在受試者判讀完畢與對原案分析有困難時，採取事後晤談補充判讀歷程，並在原案中註明晤談

結果。以「持續比較法」，就學生的判讀策略進行編碼，將可歸於同類的反應合併於一類，當無法併入任何一類時，則浮現出新類型，重複此過程，直到所有的原案分析完畢。

（三）判讀策略的比較

研究者依據決策的觀點與判讀的結果，檢驗個案在各文本的判讀行為是否恰當，並計算高中教師、高中生判讀特定文本策略出現的人次。做完部分資料分析後，並將分析成果請評分員R_2重新閱讀，以判定此結果是否有過度推論之情形。

五、研究效度

研究必須考驗對特定策略所下之定義與分類方式是否適切，因此本研究運用「三角檢證法」（triangulation）做為資料編碼。Denzine將其分為「資料三角檢證」、「研究者三角檢證」、「理論三角檢證」及「方法論三角檢證」等四種（吳芝儀、李奉儒譯，民84）。本研究採用「資料三角檢證」（個案在文本上的批註、事後晤談的確認、個案的任教教師之評論）、「研究者三角檢證」（兩位分析者R_1、R_2重新審視研究之發現）、及「方法論三角檢證」（放聲思考、事後晤談）。並藉由「研究對象的檢核（member checking）」，在訪談和觀察之後，研究者與被研究者討論文稿及雜記，最後的研究報告也請他們提供回饋建議，以確認能掌握被研究者所提供的經驗和想法，並與被研究者建立信任合作的關係，降低可能由研究者或研究對象所造成的誤報或失真現象。

例如，文本甲使用數學歸納法，其過程完全錯誤。但LM1在放聲思考時，自稱遺忘何謂「數學歸納法」，但從事後晤談其文本有效性判斷正確，似乎LM1是從證明架構去判斷的。為瞭解實際上是否如此，研究者進一步以晤談加以確認。

〔LM1數論文本丙事後晤談〕

L：〔……〕<u>第七行，數學歸納法忘記</u>，所以不太確定這個是不是正確的，如果下面第八行假設是正確的，第九行就是剛才拆開來是3的倍數，設u和v是3的正確。

R：你認為這個證明對還是錯？

L：錯。

R：為什麼？

L：如果等於2的話就變成這邊是6【認為第八行，代入數字後變成6的倍數，這樣就不是在證明3的倍數】，那這樣就會變成3×2，〔……〕我的理由是：<u>若k,m為偶數，則不成立。【不能證明成3的倍數，反而證明成其他數字的倍數】</u>〔……〕。

R：請把它的大意說出來，它在講什麼？

L：它用數學歸納法證明，可是數學歸納法是使用在……就是連續……就是可以<u>被連續整數整除啊？可是它只有被3整除，所以沒辦法使用</u>。

R：連續整數整除？就是1、2、3、4、5、6都可以整除才可以用？

L：對啊。

R：它只有被3整除，所以不能用？

L：嗯。

LM1提及數學歸納法用在與自然數n有關連續整數的證明，卻又提及是指被連續整數整除，故LM1屬於知道使用「架構參照」策略，實際上並沒有完全理解「數學歸納法」的意涵。研究者R_1並在做完部分資料分析後，將分析成果請共同研究者R_2重新閱讀，以判定此結果是否有過度推論。

肆、結果與討論

以下依據判讀歷程原案、晤談結果等資料，就高中教師、高中生判讀策略的使用方式與數量加以探討：

一、高中教師、高中生在各種判讀策略使用方式的對照

本研究將實徵研究中個案所使用之判讀策略，若未出現在一般語文閱讀理解策略者，歸於「領域特定」判讀策略；反之若與一般語文閱讀理解策略相同者，則歸於「領域一般」判讀策略：

（一）「領域特定」判讀策略

「領域特定」判讀策略共11種，依出現頻率高低依序為：實作驗算、標示附圖、修訂文本、架構參照、反例駁斥、視覺直觀、試誤驗證、重新作圖、圖形翻轉、逆推思考、慣性判斷，茲簡述如下：

1. 實作驗算

此策略同時出現在數論文本與幾何文本，實作驗算是判讀者在文本旁邊複製原先文本的計算或推理過程，重新加以驗證，並不涉及文本的修改。高中生的實作驗算通常訴諸直覺思考，在「實作驗算」策略的使用上，不像高中教師能夠提出符合數學社群要求（mathematical norm）的推理過程，以高中教師GF1與高中生LF1為例：

〔GF1判讀數論文本乙〕

G：（u－v）^{2}可以被3整除，那u－v？我想一下喔！（u－v）^{2}可以被3整除【動筆在文本上書寫推理過程】。

G：一個數的平方是3的倍數，則這個數一定是3的倍數【質疑並簡化問題】？

G：如果反證法，<u>3m＋1</u>……對，所以這個是對的【將不能被3整除的數設成3m＋1，代入檢驗】。所以（u－v）^{2}可以被9整除，對啊【勾選】。（u－v）是3的倍數，<u>把它假設成3t好了，那這個式子就9t^2</u>，所以就9的倍數，所以3uv就可以被9整除，我看一下，9的倍數，9的倍數，對啊！【確認文本】

〔LF1數論文本乙事後晤談〕

L：它的大意就一開始先把它配成那個平方式，所以原先的式子就會變成（u－v）^{2}＋3uv，然後原本的題目有說u^2＋uv＋v^{2}可以被9整除，所以它也能被3整除，因為9是3的倍數嘛，然後，所以就（u－v）^{2}可被3整除，因為第一個式子是加3uv啊，然後3uv就可以被3整除，那整個式子都能被3整除的話，可見得（u－v）^{2}也可被3整除嘛，所以是對的【對第四行的解釋正確】，<u>那平方能被3整除的話，開根號出來應該也可以被3整除嘛【對第五行的解釋不夠完整】</u>。

對於「（u－v）^{2}可以被3整除→（u－v）可以被3整除」的判讀過程，GF1未將問題簡化為「3｜a^2→3｜a」，而是提出「反證法」檢核上述推論；LF1則直觀地說出「平方能被3整除的話，開根號出來應該也可以被3整除」，沒有考量到這是因為3是質數。換言之，高中生沒有詳細檢驗推理步驟，不夠重視步驟的嚴密性，只依據單一步驟的直觀理由便完成實作驗算，研究者猜測這可能與高中生接受的形式數學訓練較少或對數學的概念性知識缺少整體性的理解有關，也可能是高中生LF1

在沒有人提出挑戰性替代理論之下，為文本中的判讀障礙所提出的自我詮釋，不能察覺所使用知識的內在限制，而陷入不合宜的「問題空間」中，進而影響判讀的正確性。

2.標示附圖

「標示附圖」是判讀幾何文本的策略，也是判讀幾何文本的第一步驟。此策略是將文本的敘述轉換成圖像表徵，表徵轉換的正確性關係著判讀的成敗，高中教師、高中生在閱讀幾何證題或文本時，都能就文本敘述中的關鍵線段或角度用不同的記號在附圖上標記，例如：LF2在幾何文本丙，會將相同長度的線段用相同數目的短橫線「∥」在附圖線段上標記，另外將相同大小的角度用「○」在附圖角度上標記：

〔LF2判讀幾何文本丙〕

L：丙的証明，行一，設∠DAM＝x，在哪裡DAM喔！∠DAM＝x，角，可以寫在上面嗎？

R：可以，用藍筆。

L：〔……〕設∠DAM＝x，∠BAE＝2x，2x，好，正確〔……〕，為什麼會這樣？$\overline{AD}$＝$\overline{AF}$，∠ADF會等於∠AFD，這是等腰嘛！這樣子，然後這樣、這樣、這樣【以∥、○等標示圖形】，然後做$\overline{EF}$，$\overline{EF}$會等於$\overline{EC}$這樣會變哪個嗎？這樣子連起來，跟這樣子連起來，想想看，這個一樣，做$\overline{EF}$＝$\overline{EC}$＝$\overline{CG}$，$\overline{EF}$＝$\overline{EC}$＝$\overline{CG}$【在圖形上對相同長度線段標示相同記號】，它就是等腰囉！〔……〕

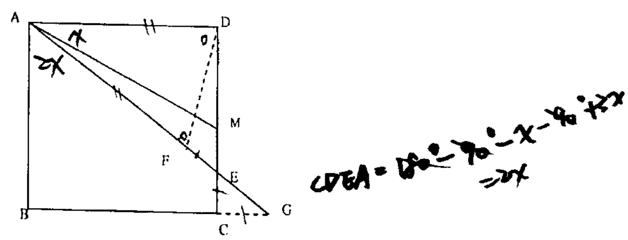


圖1 高中生LF2之「標示附圖」策略

「標示附圖」可從圖形的對應中確認文本的意義，也可比對是否有圖文衝突的情況發生。將文字的訊息轉化成圖形的意義後，有助於記憶已證實的資訊，將「已知」與「未知」做正確的區隔，降低記憶的負荷。大部分個案均能正確地使用這項策略，但高中生LM2判讀幾何文本丙，曾看錯文本的符號，並將文本與附圖對應錯誤，形成錯誤的表徵轉換。晤談後研究者確認這項策略應是國中幾何證明的學習成果。

3.修訂文本

當高中教師遭遇理解困難或發現文本的論述不完整時，可能會嘗試修改他們認為錯誤的部分，或延續原作者的觀點，重新補寫文本所缺少的推論。例如：高中教師GF2針對數論文本乙的最後兩行寫下輔助證明：

〔GF2判讀數論文本乙〕

G：我覺得它跳的太快了啦！

G：第十行到第十一行這裡，u－v可被3整除，所以我假設為3k，那u或v能被3除，所以假設u＝v＋3k，如果v是3的倍數，那u也是3的倍數，如果u是3的倍數，那麼v也是3的倍數，所以u跟v都能夠被3整除是因為（2）的關係。

G：我覺得這個可以【判斷】，但是好像跳的太快了。

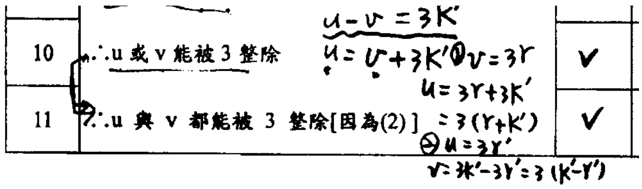


圖2 高中教師GF2之「修訂文本」策略

高中生雖然也發現數論文本乙的最後兩行不能理解，但他們面對理解困難時，卻無法延續原作者的觀點，重新補寫文本所缺少的推論，而只能就字面上提出模糊不清的解釋，因此影響判讀成敗。例如：LF2誤以為數論文本乙錯誤，而將正確的部分刪去：

〔LF2判讀數論文本乙〕

L：推理有錯誤，我覺得它第十步驟到第十一步驟怪怪的。

L：〔……〕第十到十一行就是看不太懂它是怎麼接下來的。

L：u與v都能被3整除，因為（2），為什麼會因為（2）呢？（u－v）可以被3整除，所以（u－v）^{2}也可以被3整除，所以u與v都能被3整除。我是覺得它用（2），應該不足以證明u跟v會被3整除吧？【沒有想出原因，個案確實不能理解這行的意義】〔……〕要是我，會選用第一個啦啊！用第一個式子【第九行改寫因為（1），這是錯誤的改寫】。

「修訂文本」源自於判讀者對文本推論「可延展性」的預估，雖然不同個案對於可延展性的預估並不相同，但高中教師對「可延展性」並非採取毫無限制的態度。「修訂文本」主要集中在無心的計算錯誤、符號錯誤、或推理跳動太快，高中教師GM1會從上下文及錯誤所在位置去區辨應屬關鍵錯誤還是推理不足。判讀前構建證明的表現，高中教師優於高中生，因此在「修訂文本」的策略執行上，高中教師較能同時扮演「判讀者」內部的「第二作者」的角色，依據文本的脈絡，補充推理所欠缺的部分。「修訂文本」不只是消極地將文本錯誤改正，更是積極地從修改中「確認」原推論正確，該文本是有效的。

4.架構參照

數學證明的某些方法具有特定的證明架構，例如：「數學歸納法」基本形式是：若命題P（1）成立，假設命題P（k）成立，可以推出命題P（k＋1）成立，這裡的k是任意正整數。判讀者看到文本後，可能先瀏覽全文，辨別文本是否使用特定證法，進而憶取該證法的架構以供參照：

〔GM2判讀數論文本甲〕

G：那中間這一些推論，感覺它是用數學歸納法，可是跟數學歸納法並沒有關係，因為數學歸納法，我們是一般在證明一個跟正整數n有關的命題，那今天這個n其實並不是命題裡面的一個n，而是你自己假設9的倍數，就是9倍，9n，這個用數學歸納法感覺有一點奇怪啦！而且我們以結論來講的話，是完全沒有意義的。〔……〕就是設9的倍數，得到這個倍數一定是3的倍數，其實這等於是一個廢話，那在第九行它怎麼得到的，顯然又太快了一點。

〔LF2判讀數論文本甲〕

L：由數學歸納法得知，u^2＋uv＋v^2能被3整除，正確。數學歸納法嗎？我想一下，應該是吧，對。故u^2＋uv＋v^2＝3m，恆為正整數，對。u提出來，啊【覺得很驚訝】！v^2一樣，喔u，u^2 ＋uv＋v^2＝3m，u提出來，然後u（u＋v）＋v^2＝3m，故u和v為3的倍數，u（u＋v）＋v^2＝3m，所以u和v為3的倍數，u（u＋v），為什麼會這樣子呢？不太懂？看看吧，不懂！

R：請說大意。

L：〔……〕第三步驟的話，設n＝k時成立，沒錯，用數學歸納法證明，它就是這樣子的步驟啊！所以沒錯。〔……〕

高中生雖然也出現類似高中教師的「架構參照」行為，但只是依據文本表面所敘述的條件來判斷文本有效性，並未真正理解「數學歸納法」的n與倍數假設的n是不可混用的，最後高中生都誤以為採「數學歸納法」的數論文本甲是有效的。研究者也發現「架構參照」的啟動可能源自於證法名稱的清楚標示（例如：數論文本甲寫出「數學歸納法」一詞），也可能是因為關鍵字的出現（例如：預試的數論文本中有「矛盾」一詞）。除了LM2忘記「數學歸納法」為何而無法執行該策略之外，其餘個案都能正確地識別架構，很快縮小判讀的範圍。高中教師對證法加以評估，據此擬定局部修正的行動；高中生則依據文本的表面結構判斷文本的有效性，耗費時間在不必要的修正上。判讀初期對證法的評估可能影響判讀正確性與時間分配，高中教師、高中生「架構參照」的精確度不同，也影響判讀的結果。

5.反例駁斥

要反駁一項論證，舉出反例駁斥局部論點是一個常用的策略。但反例必須先合乎子前提，並與子結論矛盾。例如：

〔GM1判讀數論文本乙〕

G：我突然想到一個東西，就是u－v可以被3整除，（u－v）^{2}可以被3整除。我在考慮說，如果u跟v是兩個相等的數字，會不會有問題？

G：<u>因為我突然想到（u－v）被3整除的話，如果（u－v）是0的話，u就等於v，那所以u＝v會不會有問題【找反例】</u>？如果u＝v的話，那這裡就是3uv，那就是3u^2，那9整除3u^2，u是3的倍數，這好像沒有什麼問題，這個應該是正確的【檢驗計算】。

〔LM2判讀數論文本乙〕

L：此證明完全正確，不同意。〔……〕我的理由：<u>因為（u－v）^{2}可以被3整除，若（u－v）2＝3，u－v就是$\sqrt{3}$</u>，無法被3整除，好了。

R：請把大意說給老師聽。

L：因為u^2＋uv＋v^{2}能被9整除，這是題目給的，所以u^2＋uv＋v^{2}能被3整除，因為9的倍數都是3的倍數，所以（u－v）^{2}可被3整除，這個沒有錯，<u>而u－v可被3整除，這個不一定，如果它是3的話，變成$\sqrt{3}$就不可能【舉反例反駁】</u>，所以（u－v）^{2}可被9整除，就不一定。

高中教師GM1檢驗後更確信文本的有效性，高中生LM2則將正確的數論文本乙誤以為是無效的文本，LM2並沒有掌握反例的運作機制，（u－v）^{2}可被3整除，已預設u、v都是整數。故u－v＝$\sqrt{3}$與已知牴觸，並不是有效的前提。舉反例是兩組個案都曾使用的策略，但高中教師能針對異常論點的特性，制訂精確的限制條件在記憶中搜尋，舉出有效的反例，或從特例的測試中漸漸縮小條件的限制範圍，找出有效的反例，以省略不必要的步驟，高中生則因舉出無效的反例而被誤導。

6.視覺直觀

幾何文本的附圖並非原題的附圖，而是構建者「加工後的圖形」。高中生比高中教師易受到附圖的視覺印象所影響，以「視覺直觀」作為判讀幾何文本的策略。

〔LF1判讀幾何文本丙〕

L：做$\overline{EF}$＝$\overline{EC}$＝$\overline{CG}$【在圖形上標示】，所以∠EFC＝∠ECF，這也是對的【打勾】，因為△EFC是等腰三角形嘛【找出隱蔽的前提】。

L：∠CGE＝∠ECG【在附圖上標上記號】，∠CGE＝∠ECG，這是不對的，劃掉，第五行改∠CGE，應該是∠CEG。

〔GM1判讀幾何文本丙〕

G：做$\overline{EF}$＝$\overline{EC}$＝$\overline{CG}$，這個也是不對的喔，這是錯誤的【能察覺不可能的作圖】，因為$\overline{EF}$這沒有辦法做喔，這下$\overline{EF}$這邊是沒辦法知道它等於它啦【指第四行前面】，所以就沒辦法做了，你更不知道它是不是等於$\overline{CG}$，所以第四行整個是錯誤的，那你得到∠EFC，這個寫的也是錯誤的喔，∠EFC，它可能應該是要說∠ECF，這個都不對，我看不懂它要寫什麼角相等耶？它是不是要寫∠CEG＝∠CGE啊？這個是不是要寫∠CEG＝∠CGE啊【對照圖形後，發現圖文衝突】？所以你看∠CEG＝∠ECG，CGE這個也不對，這個應該是∠CEG＝∠CGE才對。

高中教師GM1觀察圖形後，看出下一行的∠CEG＝∠CGE與圖形不合，但GM1並不將視覺直觀當成優先策略，而會考慮輔助線的作圖程序是否會與圖示一致。高中生往往對附圖錯誤無法察覺，對自己的判斷也沒有提出具體理由，其判斷是只出自於視覺印象的直覺相信。

7.試誤驗證

高中生判讀數論文本時，出現「試誤驗證」策略。當LM1判讀數論文本乙，對「（u－v）^{2}可以被3整除→（u－v）可以被3整除」的推論過程，以代入數字的方式檢驗：

〔LM1判讀數論文本乙〕

L：（u－v）^{2}可被3整除[因為（1）]，正確。

L：∴u－v可被3整除，是第（2）式，【代數字檢驗，將分別以9、3取代u、v】，9－3的話是6，可以被3整除，9，27－18被3整除，正確。【檢查兩個實例，當實例不容易尋找時，便涉及是否能引用性質或簡化問題以尋找實例】。

LM1只代入一組數字便接受該文本為真，研究者將之歸類為「試誤驗證」。若個案能將所有數字簡化為幾類，例如：3的倍數應該分成3k、3k＋1、3k＋2，或將之以0、1、2逐一代入檢驗，這是一種「窮舉檢驗」。個案必須知道這樣的簡化討論已含蓋所有類型，但本研究的高中生並沒有出現「窮舉檢驗」的策略；高中教師則傾向於使用形式推理去檢驗，而不使用代數字的方式。使用這種策略的高中生，在搜尋數字檢驗時，沒有仔細考量所有可能情況，換言之，他們誤將單一正例對論點的支持力過度強化。

8.重新作圖

高中生在幾何文本上過度倚重「視覺直觀」，高中教師GM2以「重新作圖」檢驗附圖的正確性。GM2懷疑幾何文本丙中三條輔助線$\overline{EF}$＝$\overline{EC}$＝$\overline{CG}$的正確性，進而質疑下一句∠ECF＝∠FCE是否成立：

〔GM2判讀幾何文本丙〕

G：$\overline{AE}$等於，這個正確【判讀到最後一行】。

G：做$\overline{CE}$＝$\overline{EF}$＝$\overline{EC}$，$\overline{EC}$，【回頭重讀第四行】$\overline{EF}$＝$\overline{EC}$，$\overline{EF}$會等於$\overline{EC}$嗎？做$\overline{EF}$＝$\overline{CE}$＝$\overline{CG}$，推得∠ECF＝∠FCE，∠FCE，連接【對照圖形檢查，在旁邊畫圖】。

高中教師GM2依據文本重新繪製∠ECF＝∠FCE的圖形，做為檢驗「$\overline{EF}=\overline{CE}=\overline{CG}$」的輔助手段，新圖形移除原作者加工的痕跡，判讀者可以更真切的對應文本的輔助線作圖流程，檢驗輔助線作圖的正確性。

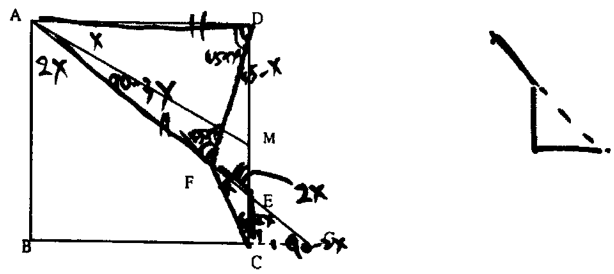


圖3 高中教師GM2之「重新作圖」策略

9.圖形翻轉

LM1是高中生中唯一認定幾何文本丙無效的個案，LM1在判讀原案中採用「圖形翻轉」的策略，將書面文本旋轉：

〔LM1判讀幾何文本丙〕

L：$\overline{EF}=\overline{CE}=\overline{CG}$，是否三個真的相等？

R：你認為正確嗎？

L：對【確認LM1對行四的判斷】。

R：為什麼？

L：因為如果把ECG翻轉過來【將文本翻轉，即將圖形翻轉】，就會變成一比一，然後，等一下喔。一比一，$\overline{EF}$比$\overline{CE}$等於一比一，對頂角相等，對頂角相等。然後平行。SSA，應該是相似吧？錯誤【認為第四行錯誤】。

Duval（1995）提出四種對幾何圖形的認知理解（cognitive apprehension），包括：（1）知覺性（perceptual）；（2）序列性（sequential）；（3）論述性（discursive）；（4）操作性（operative）。其中「操作性理解」是以不同方式變更圖形，可在腦中操作或實際去變動它，從操作過程中得到某個證明步驟或解題的洞察。LM1的「圖形翻轉」策略與GM2的「重新作圖」策略，均顯現判讀者確實達到「操作性理解」。當題目有附圖時，必須將焦點放在圖形中哪些是本質上的要點，「圖形翻轉」與「重新作圖」即為判讀者面對錯誤附圖的解決之道。

10.逆推思考

判讀文本時，判讀者通常是按照文本的順序判讀，但遇到某一行不能理解時，判讀者使用哪種策略來解決？例如：LF1完全忘記幾何文本丁的tan2θ公式，他跳過不懂的部分，讀完後面的文本，再回來判斷：

〔LF1判讀數論文本丁〕

R：請說出大意。

L：它一開始先令∠DAM＝θ，然後第二行我看不懂，如果跳過第二行，以第三行來看的話，〔……〕，所以$\overline{AE}$就等於$\frac{3}{4}\overline{AG}$就等於$\frac{5}{4}$，第九行看不懂，然後第十行就是它的結果，嗯，對。

R：〔……〕第二行呢？你看不懂為什麼？

L：嗯，對啊。

R：〔……〕你不知道為什麼，會覺得它是錯的還是對的？

L：我通常會認為它是對的，我會看它後面，如果後面是順的，那前面通常就是對的。

R：〔……〕如果前面沒看懂，妳還是只要看後面順不順？

L：就是看後面結果會不會很奇怪啊，會不會算到一半，然後覺得好像哪裡怪怪的，那可能就是錯的，不然就用後面去推前面。

LF1在放聲思考原案中直接跳過第二行，在問卷中，當研究者問及是否曾思考tan θ 與tan2 θ 的關係時，LF1表示完全沒有想過，因為看不懂。如同LF1所稱，如果看不懂就用後面去推前面的。這種認識過程與事物發生的過程相反，在順序上是逆推的，即為本研究所稱之「逆推思考」策略。LF1在執行層面上是不完整的，高中教師順利判讀該文本，並未出現「逆推思考」的策略，但LF1的說法揭示判讀者無法理解文本的某一段時，可能先跳過，改採「逆推思考」應對。

11.慣性判斷

高中生LF2對數論文本甲的最後一行「u（u＋v）＋v^2＝3m，故u和v為3的倍數」不能理解：

〔LF2判讀數論文本甲〕

R：請說大意。

L：第一個步驟是把題目給的條件寫出來，u^2＋uv＋v^2是9的倍數，所以把它設成9n，這個假設是對的，第二個步驟，〔……〕，所以第八步驟也沒錯。然後第九步驟看不太懂，為什麼是3的倍數，但它的確可以證到u和v是3的倍數？〔……〕

L：可是我又覺得說前面一到八行都算對的話，照理說第九步驟應不會錯。

LF2認為前面都對，最後一行應該也不會錯，與認知心理學的「月暈效應」極為類似。實際上數論文本甲的「數學歸納法」，只是徒具形式，前八行都沒有意義。如果LF2能舉反例檢驗第八行與第九行的連結，或許可判斷此兩行間的推論錯誤。但LF2認定前八行的推論都正確，因此依常理推斷該文本是有效的，此為「慣性判斷」策略。「慣性判斷」出現在判讀者對於文本某部分不確定時。

（二）「領域一般」判讀策略

「領域一般」判讀策略共有六種，依出現頻率高低依序為：**自問自答**、**重點畫記**、**訊息聯想**、**重新閱讀**、**摘要大意**、**對上下文**。由於「領域一般」判讀策略與一般閱讀理解策略（參見Chamot et al., 1993; Forrest-Pressley & Gillies, 1983）相似，故只以「摘要大意」為例，加以闡述：

「摘要大意」是指判讀者從論證文本中，區辨出重要與不重要的訊息，然後綜合這些重要的訊息創造出新的、連貫的、濃縮的文章，來代表原來的內容。在論證判讀的另一層意義是「判讀者以精簡的文字表達對證明方向的掌握」。例如：當GM2判讀數論文本甲時，能自發性的說出該文本的證明方向：

〔GM2判讀數論文本甲〕

G：〔……〕我還在看它解題的意思，當n＝1的時候這個是9，9它把寫成3×3，推論是算可以，然後n＝k的時候成立，就是9k，k為正整數；第五行，當n＝k＋1的時候，9倍的k＋1，9倍的k＋1，由數學歸納法得知這個可以被3整除，所以這個是3的倍數，u^2＋uv＋v^2是3的倍數，所以u跟v是3的倍數，喔，這好難改喔！

R：沒關係，你想到的都可以說。

G：這個學生的做法蠻奇怪的，因為它從第一行假設是9的倍數，然後繞了一大圈用看起來像數學歸納法的方式，繞了一大圈得到第八行，結果得到，你假設9的倍數得到一個結論，結果一點意義也沒有，因為一定是3的倍數嘛。得到這個結論是老早就可以知道的，因為9的倍數一定是3的倍數，然後利用u（u＋v）＋v^2是3的倍數，再去推論出u、v都是3的倍數。

GM2自發性的摘要文本的大意，並確實指出文本的證明方向。只有高中教師（GF1、GM1、GM2）在數論文本甲會自發性地摘要大意，關注到巨觀層面（整段文字）的意涵，研究者猜測這與數論文本甲徒具形式的論證方式有關；高中生並沒有出現自發性的摘要大意，只集中在微觀層面（兩行之間）的檢驗，縱使研究者要求摘要數論文本甲的大意，LF1也只是重述文本各行，並無精簡文本的現象，摘要大意能力與判讀表現的關連性，仍有待未來進一步探究。

綜上所述，「領域特定」判讀策略共有十一種，「領域一般」判讀策略共有六種。高中教師、高中生的判讀策略種類大部分相同，但相同策略的使用品質並不一致。例如，高中生的「實作驗算」通常訴諸於直覺推斷，不像高中教師可以提出合乎數學社群的推理過程；高中教師「修訂文本」時，較能依據文本的脈絡，補充推理所欠缺的部分，積極地從修改中確認原推論正確，該文本是有效的，而高中生通常只是消極地將文本錯誤改正；高中生的「架構參照」策略只是依據文本表面所敘述的條件來判斷文本有效性，但高中教師則對證法加以評估，減少耗費時間在不必要的修正上；高中教師的「反例駁斥」能針對異常論點的特性，制訂精確的限制條件在記憶中搜尋，舉出有效的反例，或從特例的測試中漸漸縮小條件的限制範圍，找出有效的反例，以省略不必要的步驟，高中生則容易因舉出無效的反例而被誤導。

國內現有研究中，並未針對判讀策略作過較深入的探討。Selden 與Selden（1999）指出數學家會使用「提問和回答問題」、「構建視覺圖像」與「發展子證明」，或「產生一個簡化版本」的策略，與本研究之「自問自答」、「重新作圖」、「修訂文本」極為類似。Bonsall（1982）認為數學家會「逐行檢查」或「檢驗幾個例子」、「靠經驗及直觀來檢查決定性步驟」，本研究進一步提出「架構參照」、「標示附圖」、「實作驗算」、「慣性判斷」、「逆推思考」等策略。與Chamot et al.（1993）的閱讀理解策略相比，本研究之「重點標記」、「摘要大意」、「對上下文」、「自問自答」等與其研究結果類似，但本研究將「摘要大意」的意涵深化到對證明方向的掌握，故不同領域的判讀策略並不全然相同，探討跨領域的判讀策略，將對判讀的運作有更深入的理解。

二、高中教師、高中生的判讀策略使用量的比較

本研究先整體就高中教師、高中生在判讀成效與策略合理性進行比較，繼而細部針對高中教師、高中生在不同文本領域、不同文本有效性的判讀策略進行使用量的比較：

（一）高中教師、高中生在判讀成效與策略合理性的比較

為便於比較分析，先將八位個案在四種文本的判讀策略類型與合理性整理如表4，避免單一個案在特定文本多次使用同一策略，造成該策略使用率偏高的假象，故計算該文本中特定策略的使用人數：

表4 個案的判讀成效與判讀策略合理性

	數論文本甲（數歸法）	數論文本乙（演繹法）	幾何文本丙（輔助線）	幾何文本丁（解析法）
LF1	架構參照○ ▲	實作驗算○ 自問自答◎ 試誤驗證◎ ▲	標示附圖◎ 實作驗算◎ 視覺直觀● 修訂文本○ ▲	標示附圖◎ 實作驗算◎ 逆推思考◎ 修訂文本◎ △
LF2	修訂文本◎ 架構參照○ 自問自答◎ 慣性判斷● ▲	實作驗算○ 自問自答◎ ▲	標示附圖◎ 實作驗算◎ 自問自答◎ 視覺直觀● 修訂文本○ ▲	標示附圖◎ 訊息聯想○ 自問自答◎ 實作驗算◎ 對上下文◎ 修訂文本◎ ▲
LM1	實作驗算◎ 試誤驗證◎ 重點畫記◎ 架構參照○ △	試誤驗證◎ 反例駁斥○ ▲	標示附圖◎ 自問自答◎ 圖形翻轉◎ 視覺直觀● △	訊息聯想○ 標示附圖◎ 實作驗算◎ 修訂文本◎ ▲
LM2	實作驗算◎ 反例駁斥◎ ▲	反例駁斥○ 修訂文本● △	標示附圖◎ 修訂文本◎ 視覺直觀● ▲	標示附圖◎ 訊息聯想○ 實作驗算◎ 重點畫記◎ 對上下文◎ 修訂文本○ △
GF1	架構參照◎ 重新閱讀◎ 自問自答◎ 摘要大意◎ △	實作驗算◎ △	標示附圖◎ 自問自答◎ 重點畫記◎ △	標示附圖◎ 訊息聯想◎ 實作驗算◎ 重點畫記◎ 修訂文本◎ △
GF2	架構參照◎ 實作驗算◎ 自問自答◎ 重點畫記◎ ▲	自問自答◎ 修訂文本◎ △	標示附圖◎ 自問自答◎ 重點畫記◎ △	標示附圖◎ 訊息聯想◎ 實作驗算○ 自問自答◎ △
GM1	架構參照◎ 摘要大意◎ △	修訂文本○ 對上下文◎ 重新閱讀◎ 反例駁斥○ 實作驗算◎ △	標示附圖◎ 重點畫記◎ 修訂文本◎ △	標示附圖◎ 實作驗算◎ 修訂文本◎ △
GM2	架構參照◎ 重新閱讀◎ 摘要大意◎ △	重點畫記◎ 自問自答◎ △	標示附圖◎ 自問自答◎ 重點畫記◎ 重新作圖◎ 實作驗算◎ △	標示附圖◎ 訊息聯想◎ 實作驗算◎ 修訂文本◎ △

註：1.圓形記號表示判讀策略的合理性：「◎」表示策略合理；「○」表示策略合理但不適當；「●」表示策略不合理。

2.三角形記號表示判讀結果的正確性：「△」表示結果正確；「▲」表示結果不正確。

本研究依據個案對文本有效性的判定，以及所提出支持判定結果的理由，是否與研究者事先邀請兩位資深高中數學教師判讀的結果相同，分別給予判讀結果正確與判讀結果不正確的標記，從表4可知，在判讀成效上，高中教師與高中生判讀成功率是15：5。對照高中教師、高中生在四種文本的策略使用合理性：在數論文本甲中，高中生的「架構參照」停留在對「數學歸納法」的表面結構的認知，與高中教師對架構參照結果存疑，進而「摘要大意」並不相同；在數論文本乙中，高中生的「試誤驗證」往往是策略合理，卻不夠周延，隱含過度一般化的邏輯錯誤，高中教師則以形式推理進行「實作驗算」，避免過度一般化的邏輯錯誤；在幾何文本丙，高中生依據「視覺直觀」而接受，高中教師則以「重新作圖」突破「視覺直觀」的附圖障礙；在幾何文本丁，高中生的「訊息聯

想」與文本不合，高中教師的「訊息聯想」能正確指出隱匿的前提。表4也顯示出高中教師的判讀策略多數較為合理，且判讀結果較正確；高中生的策略則多為「合理但不適當」或「不合理」，其判讀結果錯誤較多。

（二）高中教師、高中生在不同領域、不同有效性文本判讀策略使用量的比較

為降低文本脈絡對比較高中教師、高中生判讀策略的可能干擾，本研究先將在不同領域、不同有效性文本上使用該策略的人次，依據高中教師、高中生的組別進一步整理成表5，以檢驗該策略是否為高中教師或高中生所偏好：

表5　高中教師、高中生在四種文本所使用的判讀策略

文本領域	數論				幾何			
文本有效性	無效		有效		無效		有效	
策略名稱（次數）	教師	學生	教師	學生	教師	學生	教師	學生
實作驗算（18）	1	2	2	2	1	2	4	4
標示附圖（16）	0	0	0	0	4	4	4	4
修訂文本（15）	0	1	2	1	1	3	3	4
自問自答（14）	2	1	2	2	3	2	1	1
重點畫記（9）	1	1	1	0	4	0	1	1
架構參照（7）	4	3	0	0	0	0	0	0
訊息聯想（6）	0	0	0	0	0	0	3	3
反例駁斥（4）	0	1	1	2	0	0	0	0
視覺直觀（4）	0	0	0	0	0	4	0	0
試誤驗證（3）	0	1	0	2	0	0	0	0
重新閱讀（3）	2	0	1	0	0	0	0	0
摘要大意（3）	3	0	0	0	0	0	0	0
對上下文（3）	0	0	1	0	0	0	0	2
重新作圖（1）	0	0	0	0	1	0	0	0
圖形翻轉（1）	0	0	0	0	0	1	0	0
逆推思考（1）	0	0	0	0	0	0	0	1
慣性判斷（1）	0	1	0	0	0	0	0	0

註：陰影部分表出現次數超過另一組

從表5可知：在無效的數論文本上，高中生比高中教師常使用「實作驗算」、「修訂文本」、「反例駁斥」、「試誤驗證」等策略，高中教師則較常使用「自問自答」、「架構參照」、「重新閱讀」、「摘要大意」等策略。對照所有個案的判讀歷程，研究者發現高中生的判讀策略集中在「微觀層面」（兩行之間），檢驗前後行間的計算是否有錯，或修訂簡單的計算錯誤，舉出簡單的數字去反駁其中某一行的計算有誤。而高中教師的判讀策略能顧及「巨觀層面」（整段文字），歸納整體文本的意義，對照整體文本的架構是否合於數學證明方法的規範，並且展現較多的後設認知策略，以「重新閱讀」、「自問自答」時時監控自己的理解。

〔GM2判讀數論文本甲〕

G：那中間這一些推論喔，其實感覺它是用數學歸納法，可是跟數學歸納法並沒有關係【摘要大意】，因為數學歸納法，我們是一般在證明一個跟正整數n有關的命題【架構參照】，那

你今天這個n，其實它並不是命題裡面的一個n，而是你自己假設9的倍數，就是9倍，9n，這個用數學歸納法，感覺有一點奇怪啦！【自問自答】

在有效的數論文本上，高中生比高中教師常使用「反例駁斥」、「試誤驗證」等策略，高中教師則較常使用「修訂文本」、「重點畫記」、「重新閱讀」、「對上下文」等策略。對照所有個案的判讀歷程，研究者發現高中生的判讀策略集中在「微觀層面」（兩行之間），對於文本中推理不完全的判讀關鍵點，不是以試誤的方式舉出特例去反駁其中某一行的推論有誤，就是略過或不能發現判讀關鍵點。高中生的局部修正比例低於錯誤數論文本時，一方面是因為文本大致正確不需修改，另一原因可能是高中生的解題資源不足，對於不理解的部份無法修改。例如：發現文本乙最後兩句話對「u或v」及「u與v」很可疑，卻不見得表示LF2知道如何修改，學生LF2雖然覺得質疑，但不能主動修正，就算研究者要求也未必修正正確。而高中教師的判讀策略亦能顧及「微觀層面」（兩行之間），能提出正確的修訂，並且展現較多的後設認知策略，以「重新閱讀」調整自己的理解。

〔LF2數論文本乙事後晤談〕

L：u或v能被3整除，對。u與v都能被3整除，我看看喔。因為（2），（u－v）可被3整除，（u－v）可被3整除，所以u與v都能被3整除，不懂。〔…..〕推理有錯誤，我覺得它第十步驟到第十一步驟怪怪的。〔……〕

L：u與v都能被3整除，因為（2），為什麼會因為（2）呢？（u－v）可以被3整除，所以（u－v）^{2}也可以被3整除，所以u與v都能被3整除。我是覺得它用（2），應該不足以證明u跟v會被3整除吧【沒有想出原因】。

R：〔……〕會不會修改？

L：<u>我想想，我覺得它用（2），還不足以證明說u與v都是3的倍數啊！要是我，會選用第一個啦，用第一個式子</u>。

在無效的幾何文本上，高中生比高中教師常使用「實作驗算」、「修訂文本」、「視覺直觀」、「圖形翻轉」等策略，高中教師則較常使用「自問自答」、「重點畫記」、「重新作圖」等策略。對照所有個案的判讀歷程，研究者發現高中生的判讀策略集中在「微觀層面」（兩行之間），檢驗前後行間的推論是否有錯，或修訂簡單的推理錯誤，以視覺直觀的方式將不合理的附圖合理化。而高中教師的判讀策略能顧及「巨觀層面」（命題與附圖之間），評鑑原先命題與附圖的適配性，並以重新作圖突破錯誤附圖的限制，並且展現較多的後設認知策略，以「自問自答」時時監控自己的理解。

〔GM1判讀幾何文本丙〕

G：做$\overline{EF}=\overline{CE}=\overline{CG}$，這個也是不對的喔，這是錯誤的，因為$\overline{EF}$這沒有辦法做喔，這下$\overline{EF}$這邊是沒辦法知道它等於它啦【指第四行前面】，所以就沒辦法做了，你更不知道它是不是等於$\overline{CG}$，所以第四行整個是錯誤的。

G：〔……〕<u>最嚴重的錯誤是在第四步喔</u>，因為你這個$\overline{AF}$可以做出來，但你這裡不能保證$\overline{EF}$就會等於$\overline{EC}$，這是一個很大的錯誤，不能保證這件事，如果可以保證這件事，那就沒什麼好證，那就結束了嘛【自問自答】。

在有效的幾何文本上，高中生比高中教師常使用「修訂文本」、「對上下文」、「逆推思考」等策略，高中教師使用的各項策略數均少於高中生。對照所有個案的判讀歷程，研究者發現高中生

與高中教師的判讀策略均集中在「微觀層面」（兩行之間），檢驗前後行間的推論是否有錯，或修訂簡單的推理錯誤，但高中生會以逆推思考的方式將不確定對錯的部分合理化。

綜上所述，總結在不同文本領域、不同文本有效性的判讀策略，高中教師的判讀策略多數較為合理，且判讀結果較正確；高中生的策略則多為「合理但不適當」或「不合理」，其判讀結果錯誤較多。雖然不同領域或有效性兩組的判讀策略項目不一定完全相同，例如，標示附圖並沒有出現在數論文本的判讀。但是經由細部的比較可知，高中生常使用檢視前後兩行的判讀策略（視覺直觀、試誤驗證等），高中教師則除了前後兩行的判讀策略，當判讀無效文本時，高中教師還會因應判讀的困難，比高中生更常使用針對整體文本的判讀策略（重新閱讀、摘要大意等），包含數論文本對整體論證方向的掌握（摘要大意），以及幾何文本對附圖與文本關連性的質疑（重新作圖）。也較常出現後設認知閱讀策略（自問自答、重新閱讀等）。

伍、結論與建議

本研究旨在就高中教師、高中生在判讀策略的數量與品質進行比較，研究對象為四位高二學生、四位高中數學教師，透過個案處理的方式，以放聲思考輔以晤談，對個案的原案進行分析，並根據研究發現，提出下列結論與建議。

一、結論

（一）高中教師、高中生的判讀策略使用量上大致相同，但單從閱讀理解的角度來詮釋相同名稱的判讀策略是不夠充分的

本研究個案共使用十七種判讀策略（其分類如表5）。高中教師、高中生的共同判讀策略是「實作驗算」，「標示附圖」、「修訂文本」、「自問自答」、「重點畫記」、「架構參照」、「訊息聯想」、「反例駁斥」、「對上下文」等。高中生特有的策略是「視覺直觀」、「試誤驗證」、「圖形翻轉」、「逆推思考」、「慣性判斷」；高中教師特有的策略是「重新閱讀」、「摘要大意」、「重新作圖」。此結果與Chamot et al.（1993）的閱讀理解策略部分相同，但本研究之「摘要大意」在論證判讀的另一層意涵是「判讀者以精簡的文字表達對證明方向的掌握」，閱讀後知道該論證文本的意涵，卻不能分辨該論證文本是否「證出」待證的命題，不能稱之為「理解」該證明，因此單從閱讀理解的角度來詮釋相同名稱的判讀策略是不充分的。

Bonsall（1982）認為有些人逐行檢查，另一些人靠檢驗幾個例子，靠經驗及直觀來檢查決定性步驟。本研究則發現高中生會因為「視覺直觀」而誤判，兩組都會經「架構參照」檢驗數學歸納法的三步驟，但高中生容易受到表面特徵的影響，被熟悉的證明架構所誤導，誤認為使用數學歸納法便是可信的論證。Selden與Selden（1999）主張數學家判讀時會評估宣稱，推斷、提問和回答問題，引入外部知識、構建視覺圖像或發展子證明。本研究發現亦高中生與高中教師均使用「自問自答」策略，但從高中教師、高中生的對比中，本研究發掘更多造成高中教師優勢的判讀策略。兩組的判讀策略使用量大致相同，但高中教師的判讀成功率較高，並非因為策略使用數目取勝，而可能在策略運作的品質上。

（二）高中教師、高中生在判讀策略運作品質上主要差異為於高中教師同時留意巨觀與微觀層面，並由障礙或主動啟動巨觀層面的判讀，後設認知策略出現較頻繁，而高中生則只鎖定微觀層面

總結在不同文本領域、不同文本有效性的判讀策略，高中教師的判讀策略多數較為合理，且判讀結果較正確；高中生的策略則多為「合理但不適當」或「不合理」，其判讀結果錯誤較多。雖然不同領域或有效性兩組的判讀策略項目不一定完全相同。但是經由細部比較可知，高中生常使用檢視前後兩行的判讀策略（視覺直觀、試誤驗證等），高中教師則除了前後兩行的判讀策略，當判讀無效文本時，高中教師還會因應判讀的困難，比高中生更常使用針對整體文本的判讀策略（重新閱讀、摘要大意等），包含數論文本對整體論證方向的掌握（摘要大意），以及幾何文本對附圖與文本關連性的質疑（重新作圖）。也較常出現後設認知閱讀策略（自問自答、重新閱讀等）。

換言之，高中教師、高中生的判讀策略運作品質不同點是高中教師的判讀策略同時在巨觀（整段文字、圖文之間）及微觀層面（兩行之間）運作，能察覺自己的理解遭遇障礙，彈性地在巨觀與微觀層面切換，多採用「推理導向」的判讀策略，會主動尋找隱匿的前提或文本已使用但未說明的性質，來驗證局部論點的有效性；遇到難以理解的論點時，會提出補救措施，放慢判讀的速度，經由「重新閱讀」、「摘要大意」、「修訂文本」等方式來完成判讀；能針對異常論點舉出有效反例，或從特例的測試中漸漸修正，找出有效的反例，以省略不必要的步驟，在態度上較為積極。反之，高中生判讀策略運作集中在微觀層面，侷限於各行順序而直線進行，較不能察覺自己的理解面臨障礙，傾向於訴諸直覺的臆測，例如：「視覺直觀」、「慣性判斷」等，遇到判讀障礙時略過不讀，不會採用有效的補救措施，多使用「試誤檢驗」來判斷。簡言之，高中生判讀時非常依賴紙筆計算的檢驗，無法從理解與意義化的層面去思考論證架構（例如，數學歸納法）的意義，往往將自己侷限於前後兩行之間的推理連結，在態度上較為消極。

林曉芳（民90）認為專家會尋找問題的脈絡與關係，利用基模或知識結構，把問題加以正確劃分、歸類，且將知識組織成較大區塊，其基模組知識複雜且相關的。高中生則傾向於將問題視為零碎的片段，且僅依據問題的表面結構來解決問題。與本研究發現高中教師關注巨觀層面（較大區塊），高中生卻固著於微觀層面（零碎片段）的分析結果相應合。Baker與Brown（1984）主張閱讀專家能在閱讀過程中察覺自己是否理解文意，必要時調整自己的閱讀方式。此與本研究發現高中教師能遭遇理解障礙時，啟動巨觀層面的判讀，結果類似。

Meyer、Brandt與Bluth （1980）研究發現閱讀專家善用文章結構來摘述要點，閱讀生手則比較不會辨識文章結構。與本研究結果雷同，但本研究發現高中教師較能主動關注文本的架構，並摘要局部論點的意涵，對證明方向的辨識也較正確；高中生則不能關注到，或被熟悉的文本架構所誤導，呈現「有證明架構就比較可信」的錯誤信念，縱使要求其摘要局部論點，也只是複製原先的文本，沒有精簡重點的現象，因此也不能辨識證明方向的轉折，但數學論證摘要能力與一般閱讀理解摘要能力的關連性，還有待進一步探索。

除了先前知識之外，有效能的判讀者（高中教師）需要一組可融通、調適的判讀策略，其中含蓋某些領域一般的「閱讀策略」，而判讀策略是判讀者在意識控制下，用以增進閱讀理解的活動，因此應強調權變與融通，藉由策略的使用，激發高層次的認知運作（推理、判斷等），促使判讀者對文本意涵建構完整的理解，並檢核與待證命題的適配性。因應數學論證文本的架構性（特定證明方法的架構），所出現的巨觀判讀策略，極少被閱讀理解研究所論及，這也是判讀策略與其他閱讀策略最大的不同點。傳統的數學證明教學過於強調證明構建能力的養成以及證法架構的程序，往往忽略了學生的判讀能力與證明架構的理解程度。學生的思維運作被侷限在傳統的證明步驟樣版練習，常常囫圇吞棗地記憶定理合程序，卻不知為何而做？因此當學生被要求解釋其判讀策略與論證判準時，學生常常機械化地使用紙筆驗算的策略去判讀數論文本，或一廂情願地堅信附圖的正確

性，無法從證明的方向與附圖的定位去探究文本的意義，對這些學生而言，數學證明無疑是一系列分割、不連貫事實和步驟的累積，如此的結果亦為數學教育研究者所當持續關注與探討。

二、建議

以下將根據本研究所得的結論提出建議，以作為教學或未來研究之參考。

（一）對數學教學之建議

1.教學評量方面：（1）本研究發現高中生的判讀策略只侷限在前後兩行之間（微觀層面），無法關注到整體文本（巨觀層面）的意涵，因此研究者建議若要將「論證判讀」作為數學證明學習成就評量的輔助工具，宜就學生的運作層面進行評估。（2）當遭遇理解困難或發現文本的論述不完整時，判讀者可能會嘗試修改他們認為錯誤的部分，或延續原作者的觀點，補寫文本所缺少的推論。但高中生的「修訂文本」策略通常只能就字面上提出模糊不清的解釋。因此研究者建議未來可用填空題的方式檢測學生的修訂文本能力，先告知學生需要修訂的位置，讓學生循序漸進習得這項策略。（3）高中生對於文本中的異常論點，往往不能舉出有效的反例，或因舉出無效的反例而被誤導，因此未來的教學評量可多增加反例檢測的題型，並設計「試舉反例」的教學活動。

2.課程設計方面：（1）本研究發現高中生多訴諸直觀，未能覺察論證的附圖是經過證明構建者加工而成，沒有考慮論證文本的附圖正確性，以致於被錯誤附圖所誤導，但碩士生會使用「重新作圖」的策略來檢驗附圖的正確性，因此研究者認為證明課程應融入判讀策略的教學，不只提供學生根據「原題題意」自行構圖的機會，也應重視依據「論證文本」自行構圖的機會，從不同的附圖形式下檢驗論證文本，以突破因圖形錯覺所造成的判讀障礙。並可仿製本研究，兼採放聲思考與晤談診斷學生的判讀策略使用困難。（2）研究顯示高中生的「實作驗算」通常訴諸直覺思考，不像高中教師能夠提出符合數學社群要求的推理過程，本研究建議將「證明題的訂正與驗算」納入考試題型中，讓學生從實作中培養實作驗算的技巧。（3）高中生的「架構參照」行為只是依據文本表面所敘述的條件來判斷文本有效性，並未真正理解「證法架構」的內涵，容易以為有證明架構的論證文本比較可能為有效文本，未來課程設計可提供學生判讀具特定架構無效文本的機會，以去除學生對證法架構的迷思，並釐清證法架構的意涵。（4）高中教師比高中生更常自發性的摘要文本的大意，並確實指出文本的證明方向。但高中生並沒有出現自發性的摘要大意，縱使研究者要求其摘要大意，高中生也只是重述文本各行，並無精簡文本的現象，因此未來可在數學證明單元中增加摘要大意能力的課程與練習題。

（二）進一步研究之建議（兼論研究限制）

1.研究樣本方面：本研究屬於試探性研究，受限於質性研究需要將口語資料轉錄，其分析工作亦相當費時，在有限時間與人力之下，實非一次研究可盡全功。因此本研究只就八位個案所使用的「判讀策略」進行考察。未來之研究可增加樣本數目，針對判讀策略作更精確的觀察。

2.研究方法方面：本研究使用放聲思考與晤談進行質性研究，未來可就判讀策略發展調查問卷，進行大樣本調查。領域特定判讀策略是否會出現在其他學科的文本判讀，未來可採用科學文本進行研究，可重新檢視數學本質在判讀策略上的意涵。本研究發現高中生的思維運作空間受到錯誤附圖的侷限，由於原先的研究設計強調在自然情境下探討判讀策略，研究者並不介入，但本研究並未限制個案不得重新作圖，未來的研究可觀察高中生是否知道可以挑戰附圖，再要求高中生重新作圖，進一步探討高中生是否具備必要的知識去完成某些判讀策略。

3.研究變項方面：本研究所發現之判讀策略是否可教？成效如何？對證明構建能力的影響為

何？未來可針對判讀策略設計課程，進行教學研究。

4.研究工具方面：在「涵蓋範圍」與「判讀挑戰性」的雙重考量下，研究者僅以數論、幾何命題各兩種論證文本進行研究，命題及文本類型的不同是否會出現不同的判讀策略，未來可就演繹證法、數學歸納法、解析證法、輔助線證法之外的文本加以探究。觀察策略出現的類別，可能有某些策略專屬於幾何或數論文本的聯想，但許多數論命題亦可以使用幾何方式證明，例如以正方體體積和圖像化證明$\sum_{k=1}^{n} k^3 = [\frac{n(n+1)}{2}]^2$，因此建議未來研究可蒐集以幾何方法證明數論命題的文本，再觀察某些策略是否專屬於某些數學領域。

致謝

本研究感謝匿名的審查委員及臺南大學學報編審撥冗審閱，並給予許多寶貴的建議，特致謝忱。

參考文獻

吳芝儀與李奉儒（譯）（1995）。**質的評鑑與研究**。台北市：桂冠出版社。

林建平（1994）。**整合學習策略與動機的訓練方案對國小閱讀理解困難兒童的輔導效果**。國立台灣師範大學心理與輔導研究所碩士論文。未出版。

林曉芳（2001）。知識表徵與概念學習之研究—以路徑蒐尋網路分析為評量工具。**教育與心理研究，24（2）**，229-258。

徐宗國（譯）（1997）。**質性研究概論**。台北：巨流。Strauss, A. & Corbin, J. (1990). Basics of Qualitative Research: Grounded Theory Procedures and Techniques.

郭靜姿（1992）。**閱讀理解訓練方案對增進高中學生閱讀策略運用與後設認知能力之成效研究**。國立台灣師範大學教育研究所碩士論文。未出版。

葉明達與柳賢（2004）。建立數學論證判讀認知機制之個案研究。**花蓮師院學報（教育類），19**，85-118。

葉明達與柳賢（2006年3月17-19日）。**數學論證文本的判讀策略之初探**。於「科學博物館與科學的教與學國際研討會」中發表。國立高雄師範大學、國立高雄科學工藝博物館聯合主辦。

葉明達與柳賢（2007）。建立判讀理解層級：高中生進行數學論證判讀活動困難之探討。**教育與心理研究，30（3）**，79~110。

劉雅筑（2000）。**國中學生批判思考、創造思考、閱讀理解策略與閱讀理解成就之相關研究**。國立高雄師範大學教育學系碩士論文。未出版。

鄭毓信（1998）。**數學教育哲學**。台北市：九章出版社。

Baker, L., and Brown, A. (1984). Matacognitive skills and reading. In P. D. Pearson, R. Barr, M. Kamil, & P. Mosenthal (eds.), *Handbook of reading research* (pp. 353-394.) New York: Longman.

Bonsall, F. F. (1982). A Down-to-earth View of Mathematics. *The American Mathematical Monthly, 89* (1), 8-15.

Chamot, A. U., Robbins, J., & El-Dinary, P. B. (1993). *Learning strategies in Japanese foreign language* *instruction.* Final report submitted to Center for International Education, U.S. Department of Education.

Douek, N. (1999). *Argumentative aspects of proving of some undergraduate mathematics students' performances.* Paper presented at the meeting of PME XXIII, Haifa, Israel.

Duval, R. (1992). *Argumenter démontrer expliquer: Continuité ou rupture cognitive ?* Paper presented at the meeting of Petit X n° 31, Grenoble, France.

Duval, R. (1995). Geometrical pictures: Kinds of Representation and Specific Processings. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education* (pp.142-157). NY: Springer-Verlag.

Flick, B. L., & Lederman, G. N. (2002). The value of teaching reading in the context of science and mathematics. *School Science and Mathematics, 102* (*3*), 105-108.

Forrest-Pressley, D. L., & Gillies, L. A. (1983). *Children's flexible use of strategies during reading.* In M. Pressley & J. R. Levin (Eds.), Cognitive strategy research: Educational applications (pp. 133-156). New York, NY: Springer-Verlag.

Gagné, E. D., Yekoovich, C. W., & Yekovich, F. R. (1993). *The cognitive psychology of school learning* (2nd. Ed.). NY: Harper Collins College Publishers.

Healy, L., & Hoyles, C. (1998). *Justifying and proving in school mathematics: Technical report on the nationwide survey.* London: Institute of Education, University of London.

Johnson, S. D. (1988). Cognitive analysis of expert and novice trouble shooting performance. *Performance Improvement Quarterly. 1* (3). 38-54.

Kay, D. S. & Black, J. B. (1990). Knowledge transformation during the acquisition of computer expertise. In S. P. Roberson, W. Zachary, & J. B. Black (Eds.). *Cognition, Computeing and Cooperation* (pp.268-303). Norwood, NJ: Ablex.

Krathwohl, D. R. (1998). *Methods of educational and social science research: An integrated approach.* NY: Longman.

Meyer, B. J. F., Brandt, D. M., & Bluth, G. J. (1980). Use of top level structure in text: Key for reading comprehension of nine grade students. *Reading Research Quarterly,* 16. 72-103.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and Standards for School Mathematics. Reston,* VA: Author.

Reid, D. A. (2002). Elements in accepting an explanation. *Journal of Mathematical Behavior, 20,* 527 – 547.

Schoenfeld, A. H. (1994). What do we know about mathematics curricula? *Journal of Mathematical Behavior, 13,* 55-80.

Segal, J. (2000). Learning about mathematical proof: Conviction and Validity. *Journal of Mathematical Behavior, 18* (2), 191-210.

Selden, A., & Selden, J. (1999). *The role of logic in the validation of mathematical proofs.* Cookeville, TN: Tennessee technological university. (Department of mathematics technical report, No. 1999-1). Retrieved June 25, 2003, from http://www.math.tntech.edu/techreports/TR_1999_1.pdf.

Selden, A., & Selden, J. (2003). Validations of proofs considered as texts: Can undergraduates tell whether an argument proves a theorem? *Journal for research in mathematics education, 34* (1), 4-36.

附錄：論證判讀評量工具

《數論文本》

命題：設 u, v 為正整數，u^2+uv+v^2 能被 9 整除。求證：u 與 v 都能被 3 整除。

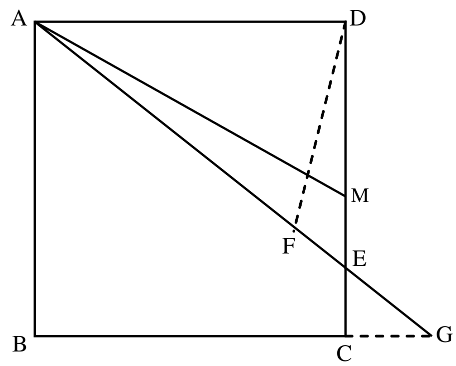
行次	甲的證明	可以理解	不能理解
1	設$u^2+uv+v^2=9n$，n為正整數，		
2	當n=1則$u^2+uv+v^2=3\times3$，		
3	設n=k時成立		
4	令$u^2+uv+v^2=3\times3k$，k為正整數。		
5	當n=k+1		
6	則$u^2+uv+v^2=3\times3（k+1）=3（k+2）$亦成立		
7	由數學歸納法得知，u^2+uv+v^2能被3整除，		
8	故$u^2+uv+v^2=3m$，m為正整數		
9	又$u（u+v）+v^2=3m$，故u和v為3的倍數。		

命題：設 u, v 為正整數，u2 ＋ uv ＋ v2 能被 9 整除。求證：u 與 v 都能被 3 整除。

行次	乙的證明	可以理解	不能理解
1	$u^2+uv+v^2=（u-v）^2+3uv$.........（1）		
2	$\because u^2+uv+v^2$能被9整除		
3	$\therefore u^2+uv+v^2$能被3整除		
4	$\therefore（u-v）^2$可被3整除[因為（1）]		
5	$\therefore u-v$可被3整除..................（2）		
6	$\therefore（u-v）^2$可被9整除		
7	$\therefore 3uv$也可被9整除		
8	[因為（1）與u^2+uv+v^2能被9整除]		
9	$\therefore uv$可被3整除		
10	$\therefore$u或v能被3整除		
11	$\therefore$u 與 v 都能被 3 整除[因為（2）]		

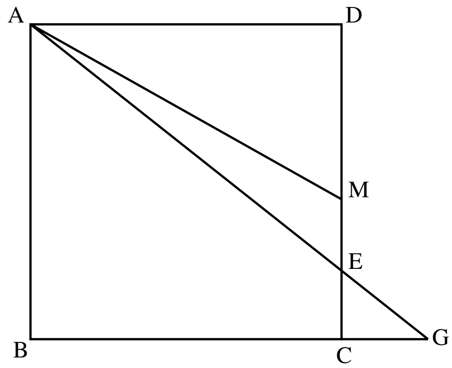
《幾何文本》

命題：在正方形ABCD中，M是$\overline{CD}$的中點，$\angle BAE = 2\angle DAM$，求證$\overline{AE}=\overline{BC}+\overline{CE}$。



行次	丙的證明	可以理解	不能理解
1	設$\angle DAM = x$，$\angle BAE = 2x$		
2	$\Rightarrow \angle MAE = 90^\circ - 3x$，$\angle DEA = 2x$		
3	做$\overline{AD}=\overline{AF} \Rightarrow \angle ADF = \angle AFD$		
4	做$\overline{EF}=\overline{EC}=\overline{CG} \Rightarrow \angle EFC = \angle ECF$，		
5	$\angle CGE = \angle ECG$		
6	$\because \overline{AE}=\overline{AF}+\overline{EF}$，$\overline{AF}=\overline{AD}$，$\overline{EF}=\overline{EC}$		
7	$\therefore \overline{AE}=\overline{AD}+\overline{CE}$		
8	又$\because$ABCD為正方形，$\therefore \overline{AD}=\overline{BC}$，		
9	$\therefore \overline{AE}=\overline{BC}+\overline{CE}$。		

命題：在正方形ABCD中，M是$\overline{CD}$的中點，∠BAE＝2∠DAM，求證$\overline{AE}$＝$\overline{BC}$＋$\overline{CE}$。



行次	丁的證明	可以理解	不能理解
1	令∠DAM＝θ，		
2	$\tan\theta=\frac{1}{2}\rightarrow\tan2\theta=\frac{4}{3}$		
3	∴$\overline{AB}$：$\overline{BG}$＝3：4		
4	如果$\overline{AB}$＝1，$\overline{BG}=\frac{4}{3}$，$\overline{GC}=\frac{1}{3}$		
5	∴E在$\overline{CD}$上		
6	又$\overline{AG}=\sqrt{1^2+(\frac{4}{3})^2}=\frac{5}{3}$		
7	∵△GEC～△GAB，比例為1：4		
8	∴$\overline{AE}=\frac{3}{4}\overline{AG}=\frac{5}{4}$		
9	$\overline{BC}$＝1，$\overline{CE}=\frac{1}{4}\overline{AB}=\frac{5}{4}$		
10	∴$\overline{AE}$＝$\overline{BC}$＋$\overline{CE}$		

投稿日期：95年7月19日
修正日期：96年2月23日
接受日期：96年3月7日

A Comparative Study On Validating Strategy Regarding Argumentation Text Between Senior High School Teachers And Students

Ming-Da Ye

Kaohsiung Municipal Hsin Chuang Senior High School

Guan-Chyun Lin

Science Education Center, Fooyin University of Technology

Shian Leou

Department of Mathematics, National Kaohsiung Normal University

Abstract

Current mathematics education reform appeals the school curriculum to pay attention to reasoning and proof. This research compares the type and quality of validating strategies which high school teachers and students use during the validating process. The participating subjects are four mathematics teachers and four senior high sophomores. First, we let students validate four kinds of argumentation text by the method of thinking-aloud, and then interview students about the strategies they use. The main findings are as follows: 1. There are eleven kinds of domain specific validating strategies and six kinds of domain general validating strategies. The aforementioned strategies appeared are in accordance to mathematics text characteristic. Interpreting validating strategy with the same term by reading comprehension is not enough. 2. Most types of validating strategy that high school teachers and students use are the same, but the quality of strategy using is inconsistent. High school teachers would start the macro's validating strategy because of validating difficultly, and operate between macro and micro levels, which are helpful to grasp the direction of proof. On the contrary, students' validating strategies only care about micro level, and are carried on like a linear sequence with the limitation of orders in each line. Students often resort to intuitive speculating or are distracted by irrelevant information.

Key words: validation, validating strategy, mathematical proof