「教育研究學報」第 51 卷第 1 期（民國 106 年）：43~70
DOI：10.3966/199044282017045101003

科技化學習模組對於國小數學歸納課程之應用效益探究

陳　沅

臺南市新南國小　教師

高振耀

國立臺南大學特教系　教授

中文摘要

本研究旨在探究數學歸納學習模組對國小學生邏輯推理之影響。研究參與者為三班共 82 名國小六年級普通班學生，此三個班級隨機分成 ICT 心智工具組、實物操作組及控制組。三組學生接受相同的前測、數學歸納學習模組以及後測，唯一的不同是學習模組實施的方式。透過共變數分析檢核不同組學生在數學歸納學習上有何不同；此外，透過階層線性模式分析三組學生起始組型設計能力與該能力成長斜率之差異。研究結果顯示在整體的邏輯推理表現上，ICT 組顯著優於實物組與控制組，而實物組與控制組則沒有顯著差異，結果亦呈現 ICT 心智工具可協助學生透過圖形鷹架掌握關鍵，以有效增進邏輯推理能力，在反思調整中達到知識質與量的擴充。

關鍵字：邏輯推理、數學歸納、對應、遞迴、函數

壹、緒論

長久以來邏輯推理（logical reasoning）一直是數學教育的重要內涵之一，清晰的邏輯推理能力是有效學習的關鍵。本文第一作者曾訪談國內科技大廠，發現擇才要件首重邏輯推理能力，此能力之所以受到如此重視，在於它是各領域解決問題的基礎。邏輯推理能力與生活中的各種能力具有高度相關，像是推測、做決定、社會判斷等（江淑卿，2007；Deloache, Miller, & Pierroutsakos, 1997; Mayer, 1991; Wright & Dowker, 2002）。美國 NCTM（National Council of Teachers of Mathematics）早已將邏輯推理納為教學主題（NCTM, 2000）；國內的九年一貫課程以及現行的十二年國教課程也都將邏輯推理列為重要議題，強調學生應發展推理能力以解決日常生活問題與生命問題（教育部，2003；教育部，2014）。然而，邏輯推理的教學是實務教師的最高挑戰，不同的教材教法關係到其教學成效（朱綺鴻，1999；Kuchemann, 1981）。本研究嘗試結合科技化的 ICT（Information and Communication Technology）輔具，期待讓學生透過鷹架建構系統性推理的策略，以降低推理歷程的認知負荷，內化與延展邏輯推理的成效。本文邏輯推理的課程聚焦在數學歸納（mathematical induction），乃因其在數學領域上佔有其獨特的地位，雖然此議題不屬於國小課程範疇，但若提供學生前導經驗，養成自主嘗試歸納的解題習慣，有助於未來擴展推理思考的層次。相關研究證實在小學階段實施數學歸納教學的可行性與價值性，比如陳沅（2007）在知識移轉鷹架化模式效益的研究中，初步證實圖形推理的學習在資優學生和普通學生的數學幾何全觀推理上能產生效果；此研究觀察到學生從發現對應關係到建立抽象化模式的過程中的確存在相當大的鴻溝，此給教學的啓示是教師必須協助學生跨越這道鴻溝，然而該研究並未探討學習過程中不同階段的推理能力之差異，因此本研究嘗試針對此進行更深入的相關探究，以期在教學實務與學術理論上有所貢獻。

貳、文獻探討

一、邏輯推理的內涵

邏輯推理主要涵蓋演繹（deduction）、歸納（induction）與溯因（abduction），三者彼此相輔相成（Menzies, 1996; Thagard & Shelley, 1997）。演繹推理是將一般通則推論到特殊事物或情境的思考方法；學習者必須把舊道理用在新事例，並對其合理性加以推斷，從而獲得嚴謹的結論。歸納推理意指從各個單獨事物中發現共同的特徵形成一般通則，所謂的一般通則可能是共同的類別、共同的功能、共同的因果關係等，由於是在許多事物中找出共同之處，所以歸納法與類比法（analogy）有緊密的關聯（毛連塭，2007；張春興，1995）。在各種邏輯推理的方式中，歸納推理較為貼近人類的生活經驗，乃因人類在了解與適應周遭環境時往往運用到歸納推理（Arslan, Göcmencelebi, & Tapan, 2009）。傳統的推論統計中，在母群體中抽取樣本，從樣本個體的共同屬性去解釋母群體，此作法亦為歸納法的實例。根據上述，演繹推理在於應用通則而歸納推理在於產生通則（高哲翰，2002；陳瑞麟，2003；張春興，1995）。而溯因推理，係根據手邊所能

獲得的資料形成解釋性的假設（explanatory hypotheses），並對此假設進行評估的過程，例如醫學診斷、錯誤的分析判斷、法律推論等（Thagard & Shelley, 1997）。

一般來說，進行推理思考歷程時會涉及到大家都知道或接受的通則，特殊的事例，以及事情發生後的結果三個部分（張春興，1995）。運用上演繹推理用來導出結果，歸納推理用來形成通則，溯因推理用來推測事例，每種推理對知識的累積與擴充皆有其獨特的功能，教學設計可針對不同邏輯推理需求來設計課程。

二、數學歸納的內涵與教學設計

數學歸納法是數學證明方法，源自 16 世紀數學家 F. Maurolico（1494~1575），此方法在數學上佔有重要地位，通常難以證明的公式，往往由數學歸納法推演而得。歸納法與數學歸納法常被誤認爲是包含的關係，朱綺鴻（1999）提到教師對在教學時常混淆二者，且在符號表徵與推導步驟的用詞有欠嚴謹，因此釐清二者在內涵上的差異，能使數學歸納的教學設計更爲有效。

（一）數學歸納的內涵

歸納法強調許多事例中發現共同之處形成通則，乃基於相同經驗所獲致的結論，其推論基礎在於有限範圍內具有的普遍性推論；數學歸納法則是嚴謹演繹推理法（deductive reasoning）的論證範圍延展，體現了知識從有限到無限的境界。數學歸納法的證明起始步驟是驗證一敘述在 $n = 1$ 時成立，第二步是推遞步驟，假設此敘述在 $n = k$ 時成立，推導 $n = k + 1$ 時亦成立，則 k 與 $k + 1$ 提供無限延續性，完美詮釋此敘述的存在。數學歸納推理步驟的邏輯具有一致性，若能在國小推理課程設計學生能接受的推理策略，啓迪學生在系統推理的思考中發現脈絡，此歷程學習所獲致的前導經驗，對於未來銜接國高中的數學歸納必有莫大助益。其內涵具有以下特質：

1. 關係對應的內涵

數學歸納法牽涉較多關係對應（relational matches），關係對應強調兩集合之間存在一個邏輯法則，當學生需要將既有的概念連結到新知識的概念上，可透過對應關係來建構出邏輯法則。通常高成就者比較能覺察知識體中的關係對應，而低成就者偏向於表面的屬性對應（property matches），因此教學設計應著重概念與類比物（analogs）之間的關係對應，以協助學生產生適當的類比對應及詮釋（邱美虹、高淑芬，1999；Gentner, 2010; Gentner & Smith, 2012）。

2. 遞迴歸納法的內涵

遞迴歸納法是研究數列最重要的策略之一（D’Angelo & West, 1999; Grimaldi, 1999; Kelley & Peterson, 2000），遞迴數列隱含固定規律，透過遞迴歸納法，將問題區分成較小思考層面，以覺察出系統的推理思維，並透過第 n 項（a_n）和前一項（a_{n-1}）關係，建立遞迴序列方程式。將遞迴做爲系統關係建置的策略，能協助學生在較開放的推理議題中思維聚焦，導引推理的脈絡。

3. 模式化歷程的內涵

推理是國小高年級的教學重點之一，然學習的內涵通常難以轉化至國高中的數學歸納。Kuchemann（1981）也指出學生在推理中導出通則是困難的，因此提供學生模式化

歷程的豐富經驗，有助於協助學生發現函數關係中的意義，而不是純注意關係中的符號。Wagner 與 Parker（1993）指出發展函數概念前的學習基礎，應跳脫機械性的演算，重視學生符號演算時的理解，具體作法包含提供函數多元表示法，比如數量表示、圖像表示與解析表示等。許多學生與函數概念的初始經驗是透過數列推理獲致，例如：任給一個 n，若 n = 0，1，2，3 時，求 2n 的值（Vinner & Dreyfus, 1989），這些早期推理經驗若結合關係對應與遞迴歸納法，有助於將函數關係清晰化。

（二）數學歸納的教學設計

數學歸納的課程設計往往侷限在三階段的模式推演訓練，與學生的生活經驗較難關連，學生難以內化與轉化。提供國小階段適切有趣的學習情境，建構結構且系列的推理學習，輔以圖像化的科技協助學生獲得早期經驗，奠基未來更高層次的推理基礎，此為可努力的方向。教學相關設計簡述如下：

1. 科技學習模組設計

進行數學歸納時學生的學習速度與抽象化程度差異性大，因此本研究採模組化教學設計，模組化教學是美國科技教育課程的趨勢之一（李隆盛，1994），依照模組單元設計的學習時間可讓學生依自己的學習速度彈性處理（鄭竣玄、黃啓彥，2003）。學習模組的內容以問題解決為導向，由三個推理層次的問題組成，強調數學歸納的策略學習。

2. 降低認知負荷設計

認知負荷為在學習新事物時工作記憶的負荷，抽象程度越高的教材所造成的認知負荷也越高（Sweller, 2004）。以國小學生為對象的數學歸納教學設計必須降低推理歷程的認知負荷，實務設計上可結合 Bruner 的螺旋課程（spiral curriculum）設計原則，將複雜的學習素材依據推理結構作適切分割，並提供圖形或操作物，強化學習者的視覺表徵，協助學習者啓動長期記憶的知識基模，有效掌握歸納歷程的關鍵（Harris & Nunez, 1996; Markovits, 1995; Pears & Bryant, 1990）。

3. 空間視覺運用設計

Reiss、Klieme 與 Heinze（2001）指出以空間關係進行非形式化的推理逐漸提昇至形式化的推理是教與學的有效邏輯論證，Lohman（1979/1988）也強調空間視覺化（spatial visualization）能刺激學生心像與轉換（transformation）能力，此能力有助於學生在不同維度之間流暢互換（林小惠、熊召弟、林世華，2006；Harle & Towns, 2011），此點呼應本研究直線分割平面的空間幾何分割歸納運用之推理表徵。

4. 圖形與代數表徵轉換的能力

Zaslavsky（1997）認為傳統教學上由代數轉換成幾何圖形的學習順序，容易讓學生在函數模式化歷程產生概念發展障礙，若改由幾何圖形轉換成代數的學習模式，應能避免迷思概念的產生。黃志賢（2014）在數學建模的研究結果中發現國內多數學生缺乏圖形與代數表徵轉換的能力，阻礙學生函數模式化概念的形成。顯然結合幾何圖形協助提升推理層次能模式出函數，能改變學生只重視形式層面的歸納步驟，為高層次抽象化學習提供一扇推理之窗。

5. 遞迴的運用

本研究主要的歸納推理模組是運用遞迴的教學策略，作為學生在對應與函數關係覺

察的橋樑。教學活動中所設計的數學歸納學習模組，乃按照抽象程度安排由直觀推理到模式化推理，內涵包括對應、遞迴和函數低中高三種層次，低層次對應強調自變項與因變項之間的對應，中層次對應強調相鄰兩個因變項的遞迴關係，本研究課程設計的遞迴解題三步驟如下：

（1）根據題目條件構造一個數列$\{a_n\}$（F_1，F_2，……F_8）。

（2）透過數列前幾項值（$K = 1\sim8$），建立相鄰項間的遞迴關係（$F_K\sim F_{K-1}$）。

（3）解遞迴關係式：求解一般項 a_n，$n \geq n_0$，滿足方程式 $f(a_n, a_{n-1}, \ldots) = 0$（由 $K = 1\sim8$ 的關係延伸至 $K = n$ 的關係）。

6. 階層的運用

本研究嘗試將國小孰悉的推理題目轉化成學生較不孰悉的類型，希望學生跳脫過去推理時的解題模式，改以開放的實作操作情境，在解題中歸納出問題的核心模式。數學歸納學習模組結合數量與圖像的互補功能，教學設計包含對應、遞迴和函數推理三個階層的能力，具體說明如下：

（1）對應推理能力：透過空間圖形對應直線分割平面最大化的推理學習系統，覺察數列模組中自變數（K 條線）與依變數（區塊數 F_K）之間的對應關係。

（2）遞迴推理能力：透過空間圖形對應直線分割平面最大化的推理學習系統，覺察數列模組中相鄰兩個依變數（K-1 和 K 條線所分割區塊數 F_{K-1} 和 F_K）之間關係。

（3）函數建構能力：透過空間圖形遞迴推理學習系統，在 F_1、F_2、F_3.....F_K 的數列模組中推得 F_K 和 F_1 的關係，並導出函數關係。

四、ICT 心智工具在數學歸納教學之應用效益

隨著雲端時代的來臨，科技運用在教學中不但是必然，也呈現快速與多元樣貌。技科運用在高認知負荷的學習活動是美國 SCANS（Secretary's Commission on Achieving Necessary Skills）的教育方針，而解決問題的科技能力（technology skills）培養更是教學重點。真正決定科技能否導致有效教學在於科技要用得巧，而不是用得多。ICT 所呈現的教學潛力，是值得持續探討，學生使用 ICT 來傳播信息，互聯網技術以 ICT 呈現活潑的互動方式，ICT 所提供的優質教育學習超越以往所能想像，含括教師發展專業能力，學生進行問題解決和實證推理任務。在高層次的邏輯推理中，重要的關鍵是如何借助 ICT 的流暢溝通性，讓學生突破純靠數字的推理，難以達到意義化與抽象化的困境。設計適切的科技化 ICT 鷹架，協助學生逐步形成概念化知識的應用效益是值得探討。

（一）心智工具運用效能探討

以電腦革新與多元應用兩個特點融入教學的心智工具（Mindtools or mental tool），被 Jonassen（2000）視爲能增進學習者創造力與推理能力，發揮他們最大潛能，並有助於他們表現知識的結構與組織方式。心智工具所強調的不是具體的設備，而是超越實體工具的心智運思觀念，促使學生淬鍊認知運思，所以既是科技化知識建構工具，亦爲學生的智能夥伴（intellectual partners），能協助學生進行分析性推理，產出概念間的因果關係（Jonassen & Yueh, 1998），發展認知策略以建構完整知識並且形成有意義的知識網

絡（Yeh & Lo, 2005）。Jonassen（1996）列舉出心智工具包括資料庫管理系統（database management systems）、試算表（spreadsheets）、視覺化工具（visualization tools）、微世界（micro worlds or simulation software）、語意網路（semantic networks）與專家系統（expert systems）等。在數學歸納學習中學生必須發展出批判思考能力，此種思考性屬於反省式思考。根據 Norman（1993）所言，反省式思考牽涉到比較、推理、做決定、問題解決等的認知狀態。有效的反省式思考需要有組織系統的程序與方法來協助，透過心智工具系統引導，協助學生擴展認知功能，指引學生在知識建構中進行思考，發展出反省式思考（Jonassen, 2000）。

從訊息處理的角度來看，運用心智工具的提示功能有助於學生統整學習策略，進而建立訊息處理時的內外在連結（江民瑜，2013；Schunk, Pintrich, & Meece, 2008）。另外，科技化的心智工具具備知識流通優勢，讓創新知識在複製使用上超越時空限制，達成快速整合與推廣知識的目標（Rogers, 1995）。國內相關研究亦證實心智工具的教學效果，比如廖本裕（2010）建置寫作認知的心智工具平台有效提升學生寫作能力；陳沅、洪碧霞、林宜樺（2003）則透過科技化心智工具檢視概念理解的過程，探索學生如何連結學習中的關鍵成分以進行有意義的思考，使知識脈絡更爲精緻化。Wood、Bruner 和 Ross（1976）提出心智工具減輕學生運思時的認知負荷，並協助他們在嘗試解決問題的歷程中覺察學習的關鍵特徵。Jonssen、Peck 和 Wilson（1999）亦提出心智工具具有積極性、學習增益性、蓄意性、真實性等特質。綜合上述，本研究結合心智工具的創新知識的複製性、檢視概念理解程度、視覺提示功能性、減低認知負荷、知識脈絡組織功能，讓學生在系統性實作模式下完成問題解決導向的學習任務，並在學習歷程的認知運作與策略調整中整合知識。

（二）ICT學習鷹架運用探討

本研究的圖像化數學推理 ICT 鷹架，涵蓋對應推理鷹架、遞迴推理鷹架與函數推理鷹架，該鷹架具備系統性路徑引導，讓學生在自變項與因變項之間的對應中發現其因果關係，逐步模式化以導引出函數關係。ICT 的運用優勢各國早已積極將之融入在學習活動中，比如英國將 ICT 納入國中小學的能力指標，且分科規劃行爲指標與指導策略（Qualifications and Curriculum Development Agency [QCDA], 2011）；日本在 2003 年的科技教育政策白皮書中將資訊科技（Information Technology, IT）改成 ICT，旨在強調運用科技主動地表達與溝通（徐式寬、關秉寅，2011；Vallance, 2008）。本研究利用 ICT 的溝通便利性在解決直線分割平面的數學歸納問題上，提供圖像化的 ICT 鷹架，讓學生透過圖形的分割操作去領悟最大化的關鍵因素，並在遞迴鷹架協助下找出函數關係。ICT 鷹架的回饋功能引導學生在新舊知識交互作用下進行反省式思考，陳沅、洪碧霞與林宜樺（2003）應用 ICT 工具的研究案例中，提供國小學生系統性的引導可參考的成功案例，也證實輔以視覺化 ICT 工具的歸納推理訓練，可減少盲目的嘗試，激發學生最高的學習潛能。另外，Krutetskii（1976）與 Presmeg（1985）的研究皆證實圖像化的視覺基模對引導解題的推理過程有所助益。

本研究的鷹架幫助學生實作學習數學歸納的推理，按抽象推理層次由低至高分成最低層次的數量對應，遞迴推理，抽象延展到最高層次的函數關係，所提供的對應推理鷹

架，特點是系統性推理的引導，讓學生按次序觀察出由 1~8 條與所分割的塊數之間的對應關係；遞迴推理鷹架透過數列前幾項值（K ＝ 1~8），建立相鄰項間的遞迴關係（F_K~F_{K-1}）。

學生對圖形與空間的了解大致可分爲知覺性了解、操弄性了解、構圖性了解、論述性了解等階層，本研究中的學習模組期待藉由科技化鷹架學生能建構系列推理策略，由嘗試推理層次提升至分析推理層次，由充分知覺性了解漸進到論述性了解，最後達到論証推理。主要目的簡述如下：

1. 探討 ICT 工具對高層次推理學習的運用效益。
2. 探討國小高年級學生在進行數學歸納歷程中圖形設計的創意成長。
3. 分析國小高年級學生在直線分割平面最大化的問題上所犯的典型推理錯誤。
4. 探討 ICT 工具與其他學習模式在運用效益上有何差異。

參、研究方法與實施

本研究透過準實驗研究設計檢核用三種不同方式呈現數學歸納學習模組的效果，同時分析學生在學習數學歸納時所出現的迷思概念類型，以作爲日後適切的補救教學，研究方法與實施過程說明如下：

一、研究參與者

研究參與者來自於臺灣南部某都會區某國小的三個六年級普通班，共 82 名學生，該校在學生數上屬於中型學校。該校六年級共有四班，其中的三班以整班爲單位隨機分派至三組：ICT 心智工具組、實物操作組以及控制組。分派至 ICT 心智工具組的班級有 27 位學生，分派至實物操作組的班級有 26 位學生，而分派至控制組的班級有 29 位學生。由於此三班皆屬於同一學校，且該校實施常態編班，因此各班能力水準大致相同。

二、研究流程

本研究流程分爲三階段，第一階段爲數學歸納課程與測驗工具發展階段，第二階段爲數學歸納學習階段，第三階段爲學習效益分析與評估階段。表 1 呈現研究流程，相關細節簡述如下：

（一）數學歸納學習模組發展階段

首先發展數學歸納學習模組與數學推理測驗（mathematics comprehensive test, MCT），學習模組的內容稍後會有詳細的介紹，而 MCT 爲檢核學生學習後一般數學推理能力是否有成長的前後測工具。由於本研究認爲數學歸納的教學必須回歸到學生一般推理能力的增長，因此 MCT 的內容不單侷限在實驗所聚焦的數學歸納問題上，而是涵蓋數量與幾何全面性推理問題，評估實驗組與控制組在整體推理性的核心能力是否有差異。MCT 爲紙筆測驗，題型爲選擇題，共 30 題，在難度層級上屬於概念理解 15%，程序執行約 30%，解題與思考約 55%。MCT 由多位資深數學典範輔導員共同研發，同時建立專家效度，MCT 範例如附錄一所示。此外，在以資優生爲樣本的先前研究中，發現組型設計可作爲鷹架協助學生覺察數學歸納的關鍵因素，因此數學歸納學習模組包含數量

推理與組型創意設計，並據此結合視覺優勢發展組型設計測驗（pattern-oriented test, POT），作爲學習歷程中的動態評量（dynamic assessment），以評估學生在數學歸納學習歷程初期、中期與後期的創意成長潛力與迷思概念。範例如附錄二所示。

（二）數學歸納學習階段

第二階段的程序採「數學推理測驗（MCT）前測、數學歸納學習模組的實施、數學推理測驗（MCT）後測」的方式，三組學生皆接受相同的前後測，測驗工具爲上述的MCT。數學歸納學習各組每周進行兩節，持續三周共六節，教學者皆爲第一位研究者。三組學生皆以相同的數學歸納學習模組學習，不同之處在於實施的方式；其中 ICT 心智工具組透過科技化圖形鷹架進行數學歸納的學習，該學習輔具是建構在 GSP 的學習系統，具備動態位移操作便利性；實物操作組則提供學生方便取得的長棒形實物進行操作學習；控制組學生在老師的教導下以紙筆進行相同問題的數學歸納學習。本階段同時啓動教室觀察，由第一研究者觀察學生的推理歷程表現。過去的研究往往僅比較 ICT 組與控制組，本研究加入實物操作組藉以探討多一種課程發展的方式，並同時比較本研究的學習模組以實物操作之成效。Gradner（1999）配合其多元智能理論（theory of multiple intelligences）中的八種智能提出多種切入點（entry points），其中一種切入點爲動手操作式，對應到肢體動覺智能（bodily-kinethetic intelligence）－善用整個身體表達思想與情感以及靈巧使用雙手製作或改變物品之能力，動手操作式讓學生有機會去實際操作物品而達到內容理解（王爲國，2006；Armstrong, 1994）。本研究三組中的實物操作組即透過動手操作式讓學生進行數學歸納的學習。

（三）數學歸納學習成效分析階段

分析階段主要在評估數學歸納學習模組的效益與學生的迷思概念，效益評估分爲兩部份，首先是分析三組學生在 MCT 上的表現，檢核不同組在數學歸納的學習成效；同時分析學生在 POT 歷程中所呈現的結果，檢核不同實驗處理對學生的組型創意表現是否造成差異。

三、研究設計

（一）數學歸納學習模組設計與實驗處理

本研究採準實驗法，所設計的數學歸納學習模組的內容強調系統性與階層性，學習目標是讓學生在直線分割平面的問題中，主動建構出自變數（直線數）和因變數（分割塊數）之間的函數關係。問題解決情境採開放性設計，如表 2 所示，數學歸納 ICT 鷹架回饋系統如圖 1 所示，模組包括數學歸納的數量推理與組型創意設計兩個學習任務。

1. 數學歸納學習模組的系統性與階層性

學習模組以問題解決爲導向，強調數學歸納的策略學習，所以學習不僅是一個題目，而是這類問題推理的策略。學習模組的系統性設計包括學習材料呈現方式以及思考路徑。自變項（直線）出現的系統性分爲三部分，第一部分是直線 1 條逐步累增到 8 條與因變項（平面分割塊數 F_1~F_8）的關係覺察；第二部分是提升抽象層次到 12 條直線與平面分割塊數 F_{12} 的關係覺察;最後提升至 N 條直線與平面分割塊數 F_N 的函數關係建立(如表 3 所示)。思考路徑則配合學習單的問題系統回答，導引學生在學習中建構系統的推

理思考地圖。

表 1

研究流程與重點

階段	項目	時間（102 年）	內涵	執行重點
一	數學歸納學習模組發展階段	09 月 15 日-10 月 25 日	發展數學歸納學習模組	研究者設計 建立專家效度
			發展 MCT 測驗工具 內容爲全觀性推理內容	八位數學輔導員命題 數學專家審題
			發展 POT 測驗 內容爲圖形組型設計	研究者設計 建立專家效度
二	數學歸納學習階段	10 月 25 日-11 月 25 日	每組每周 2 節課 進行 3 周共 6 節 （第一研究者進行教學）	1. 進行 MCT 前測 2. 進行數學歸納學習 ▪對應推理教學（1 節） ▪遞迴推理教學（1 節） ▪函數推理教學（1 節） 3. 進行數學歸納圖形創意 ▪組型設計初期（1 節） ▪組型設計中期（1 節） ▪組型設計後期（1 節） 4. 進行 MCT 後測
	數學歸納學習模組分析階段	11 月 25 日-12 月 30 日	MCT 前後測表現 POT 學習歷程創意表現	1. 分析學生在 MCT 前、後測差異 2. 分析學生在 POT 初、中、後期歷程表現 3. 分析學生在 POT 的迷思概念

再者，數量推理階層設計按問題解決的抽象層次由低至高分爲對應、遞迴和函數推理三個階層，每個階層各有不同的策略運用，學習單如附件三所示。在低抽象層次的對應推理中，引導學生將熟悉的直觀學習結果依序紀錄在表格中，以發現因變項（F_1~F_8）之間的數量變化；中抽象層次則建構半抽象的遞迴策略，亦即建立 F_1~F_8 中相鄰兩個因變項（F_{K-1} 和 F_K，$K = 1$~8）之間的遞迴關係；高抽象層次的學習內涵爲建構函數關係，由第二階層所覺察的 F_{K-1} 和 F_K 遞迴組型，推衍出 F（K）的函數關係。整個數學歸納學習模組教學的流程如附錄四所示，可讓教師在設計教案時有所依循。

2. 組型創意性設計

由於陳沅（2007）在知識移轉鷹架化模式效益的研究中，以資優生爲研究樣本做過一系列數學歸納的研究，包括直線分割平面、圓分割平面等，發現學生在嘗試解題中若沒有系統性排列，解題成功經驗僅侷限在線分割面問題，若透過組型設計所獲致學習策略，則有助於數量推理的同構（somorphism）問題產生遷移效益。因此本研究延續先前的發現，特別將組型創意設計作爲學習任務，同時將組型設計測驗（POT）作爲數學歸納學習時創意表現的分析依據，該組型創意性設計提供 8 條線，讓學生設計出將平面分割最大化的圖形組型，圖形組型評分規準包括正確性、系列性與獨創性（Chen & Hung, 2010）。根據學生在歷程中的設計，探討初、中和後期的獨創性進展表現，以及典型迷思概念。

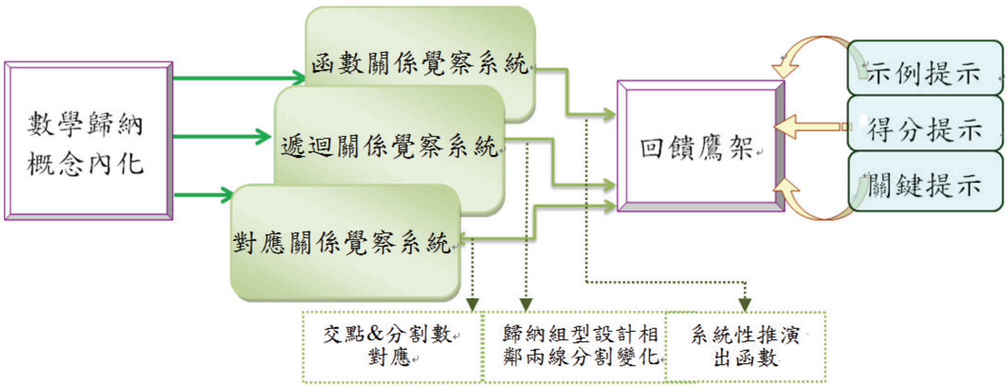


圖 1　數學歸納學習 ICT 鷹架回饋系統（改自 Chen & Hung, 2010, p980）

表 2

數學歸納學習模組的開放性問題

學習任務：平面上 N 條線最多產生幾個區塊？
作業設計類型：ICT 組作業系統為 GSP（The Geometer's Sketchpad）

作業設計問題情境：

1912 年 4 日鐵達尼號在加拿大的海面上撞上冰山而沉沒，多年後探險家在它的殘骸中發現一幅女子的畫像，這幅畫像在蘇富比的拍賣會上被一名收藏家購買，他公開徵選設計藍圖，希望有人能以雷射線設計將牆壁分成最多塊，形成最安全的雷射網，以保護這幅畫像。小朋友請你來設計看看，如何幫助收藏家完成心願？

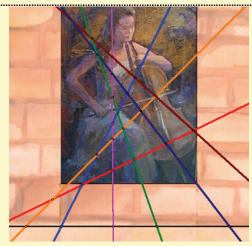


表 3

數學歸納學習模組設計與實驗處理

作業	情境	內涵	數學歸納學習	自變項	因變項	節
直線分割平面	收藏家雷射網	對應系統	•提供 1~8 條直線，學生進行系統性嘗試將平面分割最大化。 •覺察直線 $K = 1\sim8$ 的最大分割面 F_K 的數量對應關係。	直線數量 $K = 1\sim8$	分割塊數 $F_1\sim F_8$	1
		遞迴關係	•覺察分割面 F_1、F_2…F_8 相鄰兩項的數量遞迴關係。	$K = 1\sim8$	F_{K-1}、F_K	1
			•推衍 F_{12} 和 F_{11} 的遞迴關係。	$K = 11\sim12$	F_{11}、F_{12}	
		函數關係	•F（K）（K = 1~8）函數建構關係。	$K = 1\sim8$	F（K）	1
			•F（K）（K = 1~N）函數建構關係。	$K = 1\sim N$	F（K）	
圖形組型設計	組型甄選	創意設計	•設計 1~8 條線將平面分割最多塊的組型圖形。 •收集學生初、中和後期組型圖形的創意表現和迷思概念。	$K = 1\sim8$	圖形組型設計	3

（二）數學歸納學習模組的評分規準

表 4 呈現數學歸納學習模組評分規準，評分等級區分四個等級，量化分數為 0~3，對應推理的評分依據是覺察 K（1~8）條線與平面分割塊數（F_K）的正確程度，以及 K 比 K-1 條線最大分割下所增加的交點數；遞迴推理的評分是根據能否建構相鄰 2 個依變

項（分割塊數 F_{K-1} 和 F_K）的關係；函數關係的評分是根據能否建構出函數 F（K）的抽象關係。表 5 呈現組型設計評分規準示例，如前述包含正確性、系統性與獨特性三項，正確性是指創作的圖形滿足直線分割出的區塊數 F_K 達最大；系統性是指圖形的組型清晰，由 1~8 線的區塊數 F_K 設計關係中，可以覺察 K = 9 之後的組型設計趨勢；獨創性則依據前導研究中 200 多件學生設計的圖形，按出現率爲評分依據，獨特性作品必需出現比例小於 16%（約在正一個標準差以上）。圖形設計作品評定由第一研究者與參與實驗觀察者負責，評定前先接受評分訓練與試評，試評時先針對評分規準進行理解與溝通，再正式進行評定，評分者間信度是 0.91。學生在組型設計的分數爲正確性、系統性與獨特性三項的和，由低、中、高 3 期設計量化分數的變化趨勢評估學生創意成長的表現。

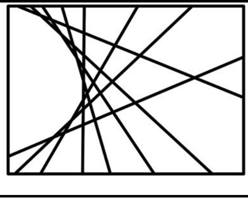
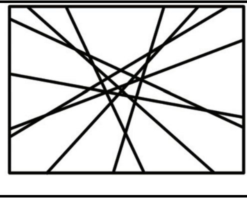
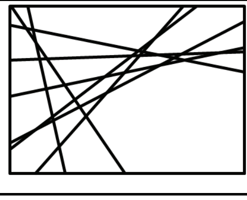
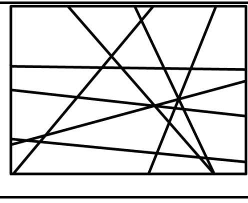
表 4

數學歸納學習評分規準

學習活動		3 分	2 分	1 分	0 分
		自變項 K：直線數　依變項 F_K：直線分割平面的區塊數			
直線最大分割平面數學歸納	對應推理	● 能寫出 K（1~8）和 F_K 的關係。 ● 能寫出 K 比 K-1 增加的交點數。	● 能寫出 K（1~8）和 F_K 的關係。 ● 能寫出 K 比 K-1 增加的交點數。 **只能完成一項**	● 部分寫出 K（1~8）和 F_K 的關係。 ● 部分寫出 K 比 K-1 增加的交點數。	● 無法寫出 K（1~8）和 F_K 的關係。 ● 無法寫出 K 比 K-1 增加的交點數。
	遞迴推理	● 能寫出 F_{K-1} 和 F_K 的遞迴關係（K = 1~8）。 ● 推演出 F_{12} 和 F_{11} 的遞迴關係。	● 能寫出 F_{K-1} 和 F_K 的遞迴關係（K = 1~8）。 ● 推演出 F_{12} 和 F_{11} 的遞迴關係。 **只能完成一項**	● 部分寫出 F_{K-1} 和 F_K 的遞迴關係（K = 1~8）。 ● 部分推演出 F_{12} 和 F_{11} 的遞迴關係。	● 無法寫出 F_{K-1} 和 F_K 的遞迴關係（K = 1~8）。 ● 無法推演出 F_{12} 和 F_{11} 的遞迴關係。
	函數關係	● 能進行數學歸納以系統邏輯推理出函數。	● 能進行數學歸納但無法以系統邏輯抽像推理出函數。	● 僅能部分進行數學歸納但無法以系統邏輯完整推理出函數。	● 能進行數學歸納以系統邏輯推理出函數。

表 5

組型設計評分規準

項目	**評分規準與分數**			
正確性 **系統性** **獨特性**	v v v	v v	v	
設計作業	**3 分**	**2 分**	**1 分**	**0 分**
圖形設計示例				
圖形設計說明	8 線組型排列獨特且清晰，將平面分割成 37 塊。	8 線雖組型排列清晰但不具獨特，將平面分割成 37 塊。	8 線沒有組型排列，將平面分割成塊 37 塊。	8 線排列不清晰亦不獨特，將平面分割區塊< 37 塊。

四、資料之蒐集與分析

資料分析以量化分析爲主，旨在分析不同實施方式（實驗處理）的成效差異，包括單因子共變數分析、單因子變異數分析以及階層線性模式（hierarchical linear models, HLM）。各種分析整理如下：

（一）單因子共變數分析：檢視不同組別在 MCT 前、後測成長差異，以評估不同實驗處理對學生在邏輯推理的延展力。

（二）單因子變異數分析：進一步深入檢視不同組別在對應、遞迴與函數三種層次推理能力之差異。

（三）階層線性模式：分析不同組別學生在 POT 學習歷程的表現，透過初期、中期和後期三階段的分數變動，以 HLM 來檢核三組學生的起始能力與組型設計創意的差異。HLM 所具備的成長斜率分析可檢視三組學生在數學歸納學習歷程中的組型設計創意之成長潛力，以及數學歸納學習模組以 ICT 和實物爲學習輔具的應用效益與遷移量。

肆、研究結果與討論

本研究發展數學歸納學習模組，並分析 ICT 工具組、實物操作組與控制（傳統講述）組三種實施方式的應用效益。同時透過學生在組型設計顯示出的迷思概念，以俾利日後進行補救教學。

一、共變數分析基本假定之檢測

三組學生在 MCT 前測的分數爲共變數，對此資料進行檢視，其變異數同質性檢定之 $F = 0.26$，$p = 0.78 > 0.05$，未達顯著水準，顯示符合變異數同質性假定條件。而在迴歸係數同質性檢定之 $F = 1.59$，$p = 0.21 > 0.05$，亦未達顯著水準，故可以將三組斜率視爲相等，符合組內迴歸係數同質基本假定，因此本研究資料適合進行共變數分析。

二、不同組別學生在數學推理整體表現結果呈現顯著差異

表 6 呈現三組學生在 MCT 表現的描述統計對照，資料顯示 ICT 組、實物操作組和控制組學生在前測表現的平均數分別是 19.23、17.00 和 17.10，標準差依序爲 8.91、8.20 和 8.41；在後測表現的平均數分別是 45.04、34.85 和 28.34，標準差依序爲 16.83、12.23 和 14.02。將組別設爲自變項，MCT 前測爲共變數，MCT 後測爲依變項，進行共變數分析後結果達顯著水準，$F = 9.54$，$p = 0.03 < 0.05$。此結果顯示三組學生排除起始點差異後，數學歸納學習模組的學習成效呈現顯著差異。

表 6

不同組別學生邏輯推理測驗前、後測結果的描述統計

組別（人數）	前測		後測	
	M	*SD*	*M*	*SD*
ICT（27）	19.23	8.91	45.04	16.83
實物（26）	17.00	8.20	34.85	12.23
傳統（29）	17.10	8.41	28.34	14.02
總和（82）	17.81	8.48	35.90	15.93

進一步以 Scheffe 法進行事後考驗，表 7 顯示 ICT 組顯著優於實物組（$p = 0.01$）和傳統教學組（$p < 0.01$），表示數學歸納學習模組透過 ICT 心智工具的成效達到最大；但是實物操作組和傳統講述組則沒有顯著差異（$p = 0.22$）。

表 7

不同組別學生邏輯推理測驗前、後測結果的事後考驗摘要表

組別（I）	組別（J）	MD（I-J）	*SE*	*p*
ICT	傳統	16.73	3.88	0.00
ICT	實物	11.53	4.35	0.01
實物	傳統	5.20	4.21	0.22

三、不同組別學生學習後在對應、遞迴與函數推理表現結果皆呈現顯著差異

本研究進一步探討不同教學法（不同組別）在對應、遞迴與函數三個不同推理層次的表現，表 8 呈現三組學生在推理歷程中每個階層學習後的描述統計對照，三組學習方式皆呈現對應與遞迴優於函數的概況。將學生在三個層次推理表現進行變異數分析，結果三者的 F 值分別是 14.24（$p < 0.01$）、27.47（$p < 0.01$）和 7.57（$p < 0.01$），顯示不同教學法對學生在對應、遞迴與函數的學習成效的確有所差異。

表 8

不同組別學生在對應、遞迴與函數推理能力的描述統計

班級	對應推理		遞迴推理		函數推理	
	M	*SD*	*M*	*SD*	*M*	*SD*
ICT	6.35	1.94	7.31	1.96	3.23	3.92
實物	5.12	2.30	5.36	3.60	0.64	2.22
傳統	3.41	1.92	1.62	2.93	0.55	2.06

（1）其次藉由 Scheffe 法進行事後考驗，結果如表 9 所示，顯示在抽象層次較低的對應推理與遞迴推理中，ICT 組與實物操作組皆顯著優於傳統講述組，但 ICT 組與實物操作組兩者的成效則未達顯著差異。由學習歷程中發現無論是 ICT 組與實物操作組的學生在進行對應推理與遞迴推理歷程時的學習動機都優於傳統講述組，嘗試解題時兩組的專注性與持久性皆優於傳統講述組，此可能是造成學習成效差異的原因。

（2）在抽象層次較高的函數推理中，ICT 組優於實物操作組和傳統講述組，而實物操作組與傳統講述組兩者的成效則未達顯著差異。函數推理的學習是必須彙整對應與遞迴推理的系統性結果，進一步抽象出此函數的組型，實物操作組的學生，在對應推理與遞迴推理時有不錯的持續力，但彙整兩組模式化過程則無法持久，而 ICT 組學生則在彙整歷程反覆透過 ICT 輔具不斷嘗試解題，此可能是實物操作組無法優於講述組的因素。

整體而言，無論是 ICT 工具或實物，對抽象程度較低的學習內容，皆具備相當程度的協助量，所以兩組的學習效果皆顯著優於傳統講述組；然而，ICT 輔具則能在較高抽象層次的函數推理中產生最高的教學效果，此發現說明了科技化的心智工具是高抽象化數學歸納學習時最佳的學習輔具選擇。

表 9

不同組別學生對應、遞迴與函數推理結果的事後考驗摘要表

項目	組別（I）	組別（J）	MD（I-J）	*SE*	*p*
對應推理	ICT	傳統	2.93	0.55	0.00
	ICT	實物	1.23	0.57	0.11
	實物	傳統	1.71	0.56	0.01
遞迴推理	ICT	傳統	5.69	0.78	0.00
	ICT	實物	1.95	0.81	0.06
	實物	傳統	3.74	0.79	0.00
函數推理	ICT	傳統	2.68	0.77	0.00
	ICT	實物	2.59	0.80	0.01
	實物	傳統	0.09	0.78	0.99

四、不同組別學生在圖形組型設計創意成長分析

組型設計是協助學生抽象化的鷹架，以三組學生在組型設計動態評量的表現作爲數學歸納學習時的創意表現。藉由學生在正確設計的基礎上來評估其獨創性，並從他們的錯誤組型設計檢視其迷思概念類型。表 10 爲三組學生組型設計歷程（初期、中期、後期）中創意表現的描述統計對照。

表 10

不同組別學生在圖形組型設計歷程創意的描述統計

班級	初期		中期		後期	
	M	*SD*	*M*	*SD*	*M*	*SD*
ICT	0.40	0.60	1.27	1.00	2.15	0.88
實物	0.28	0.54	0.36	0.49	0.76	0.83
傳統	0.07	0.26	0.10	0.31	0.90	0.98

研究透過 HLM 探討不同實驗處理，對學生在直線分割平面的組型設計之起始能力與成長斜率差異，以檢核三種實驗處理對學生在設計創意的學習潛力，圖 2 呈現三組學生在組型設計歷程創意的成長對照剖面，結果簡述如下：

（一）無條件模式

探討不同處理對學生的組型設計創意能力是否產生影響，表 11 呈現無條件模式與

條件模式的階層一與階層二之線性方程式對照，第一個層次爲受試者內設計，無條件模式中截距爲全體學生起始平均能力 $\gamma_{00(G)} = 0.19$，$p = 0.21 > 0.05$，未達 0.05 顯著水準，顯示學生在線條組型設計的起始能力未高於 0；透過斜率來看整體學生的平均成長率 $\gamma_{10(G)} = 0.51$，$p = .00 < 0.05$，達顯著水準，顯示本研究所研發的學習模組整體而言對學生組型設計創意的成長具有實質功效。

（二）條件模式

組別與實驗處理模式分析結果，其中實物操作組斜率的指標 $\gamma_{10} = 0.06$，由於 $p > 0.05$，因此實物操作組在初期、中期與後期三次時間呈現的組型創意推理能力之成長率未達顯著水準，換言之，採用實物進行邏輯推理時，組型設計能力在研究歷程中並未有顯著成長；ICT 組和傳統講述組的斜率指標 $\gamma_{11(B)}$ 與 $\gamma_{12(B)}$ 分別爲 0.82（$p < 0.01$）與 -0.03（$p < 0.01$），顯示以 ICT 工具進行學習的學生，在組型設計的成長能力顯著優於實物操作組學生，達顯著差異;而以傳統講述進行學習的學生，在組型設計的成長能力顯著低於實物操作組學生，亦達顯著差異；整體資料顯示 ICT 的協助可有效增益學生在高層次數學推理的創意表現，因此學生在初期、中期和後期歷程學習的調整較快，成長斜率優於其他二組。

表 11

組別與實驗處理兩個不同模式所得到的參數之比較

固定效果預測變項	模式 1（無條件模式）				模式 2（處理效果模式）			
	係數	*SE*	*t*	*p*	係數	*SE*	*t*	*p*
起始點（$\gamma_{00(B)}$）	0.19	0.11	1.74	0.21	0.07	0.06	0.88	0.23
ICT 組（$\gamma_{01(B)}$）					0.27	0.11	2.33	0.02
傳統組（$\gamma_{02(B)}$）					-0.09	0.08	-1.06	0.29
直線成長率（$\gamma_{10(B)}$）	0.51	0.15	3.37	0.00	0.06	0.07	1.00	0.32
ICT 組（$\gamma_{11(B)}$）					0.82	0.08	10.48	0.00
傳統組（$\gamma_{12(B)}$）					-0.32	0.06	-5.76	0.00

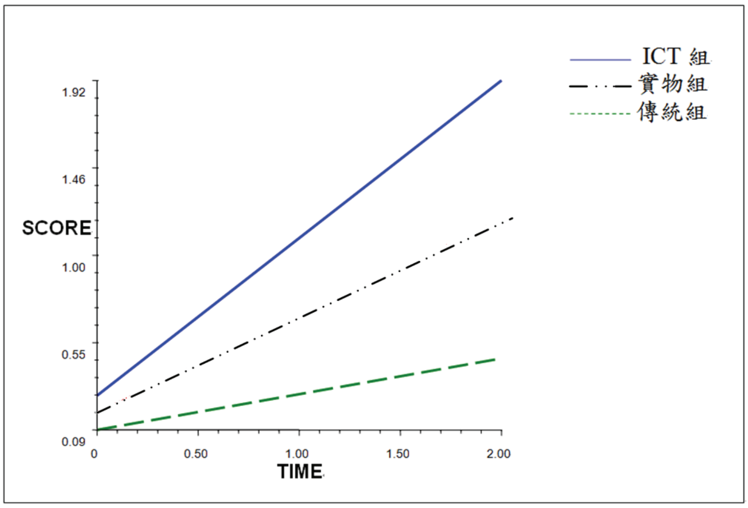


圖 2　三組學生在組型設計歷程創意的成長對照剖面

六、學生在圖形組型設計呈現的迷思概念

從學生在組型設計所呈現的錯誤類型，可明顯看出迷思概念，初期三組學生皆出現各種錯誤類型，經過中期的調整後，後期實物組學生出現的迷思概念有共點型（至少 3 線交於一點）、平行型（至少 2 線平行）、棋盤型（線呈平行線與垂直線交叉）、輻射型等（所有線共點成束狀）（詳見圖 3~圖 6）；ICT 組學生則較常出現平行型與共點型的迷思概念；而傳統講述組學生則涵蓋上述所提到的所有錯誤類型，在嘗試時比較沒章法且圖形顯得凌亂，教室觀察也發現，他們在嘗試過程中會由某種錯誤類型轉換到另一種錯誤類型，並不斷重複出現。整體而言，不同組別學生在歷程中出現的迷思概念類型大致相同，初期三組學生出現錯誤類型的比例幾乎相同，中期以後比例呈現顯著差異。ICT 組學生隨著學習經驗累積，迷思概念進入中期大部分會消失，此現象說明了 ICT 組學生已覺察直線之間的「交點」是關鍵因素；就實物組與傳統組學生而言，迷思概念在中、後期發生的機率仍然偏高，亦即兩組學生尚無法掌握「交點」這個關鍵因素。根據這些發現，ICT 心智工具的確能協助學生掌握數學歸納的核心關鍵，提高推理層次，達到較佳的應用效益，因此可被用爲學習數學歸納的利器。

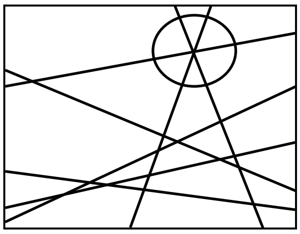


圖 3 共點型組型設計

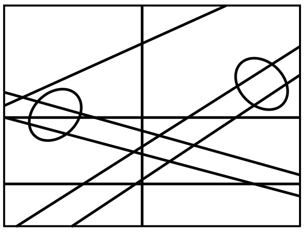


圖 4 平行型組型設計

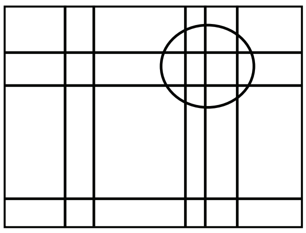


圖 5 棋盤型組型設計

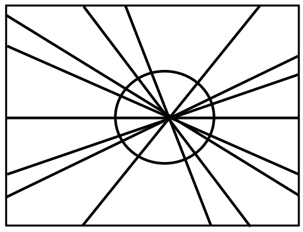


圖 6 輻射型組型設計

伍、結論與建議

本研究透過嚴謹的準實驗程序，實徵檢核數學歸納學習模組透過不同實施方式的應用效益，以評估高階推理融入國小高年級課程的可能性，並關注 ICT 工具所提供圖形鷹架之優勢，是否能降低學生高階推理的認知負荷，達到優質引導。本研究有五項重要的發現：第一、在數學推理整體表現（MCT 的得分）上，ICT 組表現最佳，實物操作組與傳統講述組則無顯著差異；第二、在抽象層次較低的對應推理與遞迴推理中，ICT 組與實物操作組皆顯著優於傳統講述組，但 ICT 組與實物操作組兩者的成效則未達顯著差異；第三、在抽象層次較高的函數推理中，ICT 組優於實物操作組和傳統講述組，而實物操作組與傳統講述組兩者的成效則未達顯著差異；第四、ICT 心智工具亦可有效提升學生在高層次數學推理的創意表現。第五、學生有棋盤型、平行型、共線型和輻射型四種錯誤組型。根據這些發現，提供以下建議：

一、視覺化的學習模組有效降低認知負荷並協助高層次推理

經過實驗驗證，本研究所研發的學習模組運用在國小高層次數學推理課程的成效確實達到顯著，不論是 ICT 組或實物操作組，在中與低抽象層次的學習成效優於傳統講述

教學，此研究結果支持許多學者對提供適切的視覺表徵物以降低認知負荷之看法（Harris & Nunez, 1996; Markovits, et al., 1995; Pears & Bryant, 1990），本研究也爲此看法提供具體的數學歸納學習模組示例。根據 Sweller（2004）的認知負荷理論（cognitive load theory），教學設計影響學生的認知負荷，有效的教學設計能夠降低認知負荷，尤其是外在認知負荷（extraneous cognitive load）。高層次的抽象思考內容，比如代數表徵，是許多學生在學習時所面臨到的挑戰（劉家樟、楊凱琳、許慧玉，2012；Booth, 1984; Kieran, 1989），因此如何運用有效策略去幫助學生進行高層次的抽象思考，是教學研究與實務的重要課題。本研究 ICT 組結合圖形鷹架，提供系統化的課程設計，降低學生的學習認知負荷，有效引導學生進行高層次的推理學習；此外，本研究擴展過去僅以 ICT 與傳統教學的比較（陳沅，2007），進一步把同樣具備視覺優勢的實物操作加入比較，結果發現無論是 ICT 或實物對學生的數學推理皆有助益；然而，實物操作雖具備視覺優勢，卻只能達到較低層次的對應推理以及少部分的中層次抽象推理，無法有效協助學生發現數學歸納中的關鍵因素，因此難以覺察高層次的函數關係。此結果顯示 ICT 心智工具的運用價值超越實物操作，提升學生的抽象思考能力到更高的層次，據此本研究更精細地比較出 ICT 與實物在推理層次上的效果差異。科技化心智工具的運用成效已有文獻驗證，如廖本裕（2010）所建置的寫作認知心智工具平台，然以科技化心智工具融入國小高年級數學歸納課程則是新嘗試，研究結果也都支持 Jonassen（1996）提出將心智工具做爲學習夥伴以協助學生發展高層次思考的可行性。

二、科技化數學歸納學習模組能讓學生藉由反思達到知識質與量的擴充

本研究所提供的 ICT 圖形化鷹架具備開放性與操作性，讓學生在實作中啓動工作記憶進行學習並適時提取長期記憶中的知識基模，使其在推理過程中結合新舊概念以產生最佳學習效果（Hoffer, 1997）。也就是鷹架所提供的系統引導，讓學生在嘗試中不斷進行反思（reflection）與調整策略，連結先前思考的對與錯，進而不斷修訂。歷程觀察發現，在同議題的自主嘗試持續性時間三組存在差異，ICT 組、實物組和控制組約呈現 4：3：2。此應與 GSP 鷹架學習系統所具備的調整便利性有關，有利於學生反覆嘗試時與思考的推論進行比對，此特色符合 Norman（1993）反省式思考的內涵，他認爲反省式思考包含儲存暫時性的結果、根據所儲存的資訊推論以及在新舊概念間來回反覆思索。整體而言，本科技化教學模組的鷹架系統有助於推理歷程的知識統整，在新舊知識的互動從認知負荷理論的觀點亦有重要的意涵，因爲此代表著儲存在長期記憶中的資訊能夠轉移到工作記憶中，進而擴大工作記憶的容量與延長其原本短暫的保存期限（Sweller, 2004）。再者，此特色亦符合 Kozulin（1990）提到「意義」才是人類知覺的要素，透過大腦對應外界訊息，連結到先前的知覺活動，並建構知識基模作爲個體適當反應的依據。此外，本研究結果也突破過去知識擴散中純粹強調人和人之間的知識擴散，印證自我知識概念化歷程，透過 ICT 輔具達到抽象化知識質與量的擴充。

三、組型設計中的迷思概念可為後續補救教學提出具體方向

本研究結合數量推理與組型設計，以及數與圖像的優勢，以協助具體化與抽象化概

念學習歷程的鏈結。三組學生在組型設計初期皆出現棋盤型、平行型、共線型和輻射型四種迷思概念，顯示學生在此期都尚未發現交點是直線分割平面最大化的關鍵，此結果與陳沅（2007）的研究相符。棋盤型、平行型、共線型和輻射型四種迷思概念大致可歸爲兩類，棋盤型、平行型屬於圖形中都有直線平行的關係，學生出現此類圖型可推知無法理解直線在平行關係時，交點數無法最多。共線型和輻射型屬於圖形中都有 3 條線共點的關係，學生出現此類圖型顯示無法理解此時亦無法產生最多交點。然而，同樣是具備視覺優勢的操作工具，ICT 比實物更能讓學生覺察到歸納推理的關鍵因素，而在組型設計方面，ICT 的協助效果亦優於實物操作。整體而言，ICT 組學生的迷思概念大致在中期就有不錯的調整，反觀實物組學生必須到後期才開始出現調整，而且調整幅度顯著低於 ICT 組;傳統講述法在數學推理上呈現明顯弱勢，在低層次推理上學生已經無法有效進行運作，因此在組型設計成功的比例偏低，出現獨特性設計的比例更低。研究結果提出補救教學運用上三個建議，其一是學生在此教學主題上因沒有相關經驗，因此難以覺察在數學歸納過程中所潛藏的「交點」變因，此點說明在教學上如果僅重視結果，學生將欠缺掌握問題解決關鍵的能力;其次是應重視學生的錯誤類型所呈現的不同迷思概念進行補救，方能提升補救的最大化效益;再者提供給學生最有利的心智工具，的確能協助學生掌握學習困難的關鍵，針對真正困難處進行補救教學，才能提升有效教學的比率。

四、ICT 學習模組可運用在普通學生，有效提升其推理學習

許多實務教師對高層抽象思考課程有不正確的觀念，認爲此課程只能運用在資優學生。雖然有研究在資優學生知識移轉鷹架化模式效益之探討中，證實高階推理課程實施的有效性（陳沅，2007），但是在高階推理課程推廣時卻難以說服任教普通班的教師。本研究以普通班學生爲研究樣本，結果顯示即便是高階邏輯推理議題，只要結合適切的 ICT 心智工具，且具備系統化的學習引導，就能讓普通學生進行學習，且能有效提升普通學生的推理層次。研究歷程中的觀察，學生不但不害怕開放性與陌生的問題解決情境，反而十分專注在嘗試解題的過程中。本研究的發現爲數學歸納的科技化學習，注入令人驚喜的希望。

五、研究限制與建議

本研究因無法以隨機方式來分配每位研究參與者至三組，而是以整班爲單位隨機分配至三組，所以在研究設計上，仍是屬於以原班自然成組的準實驗設計。本質上，其研究結果對因果關係之推論較真實驗性研究設計薄弱。再者，在研究過程中爲實物操作組所提供的長形木棒，仍然可能過粗，且有能滾動的缺點，因此對某些學生可能不方便看清楚每個線條交點。另外，數學歸納學習模組使用直線分割平面爲教材，僅讓參與者接觸到二維度的問題，因學校能配合的時間有限，故教材未能延伸至更深入的三維度問題。

針對上述的研究限制，在此建議未來可持續進行之相關研究方向。將來的研究可採用更爲嚴謹的隨機分組設計，將每位研究參與者隨機分配至各組以進行真實驗性研究。將來的研究亦可提供實物操作組更細長且無法滾動的條狀物，發揮實物操作的最大功效，以便更公平客觀地比較 ICT 組與實物操作組的學習表現。除此，實驗教學的教材內

容將來可以擴展至三維度的問題，例如平面分割空間。另外，還有一項未來研究建議是還可以針對學生在組型設計時所出現的棋盤型、平行型、共線型和輻射型四種迷思概念，做更深入的探究。

參考文獻

一、中文部分

王爲國（2006）。**多元智能教育理論與實務**。臺北：心理。

毛連塭（2007）。**資優教育：課程與教學**（初版第五刷）。臺北：五南。

江淑卿（2007）。從心智模式論點探討兒童邏輯推理能力之發展。**臺北市立教育大學學報，38**（1），1-32。

李隆盛（1994）。**工藝教材教法新趨勢：模組化的課程設計與解決問題的教學策略**。載於李隆盛（主編），科技與職業教育的課題（p. 317-341）。臺北：師大書苑。

鄭竣玄、黃啓彥（2003）。模組化生活科技教學設計。**生活科技教育月刊，36**（6），53-65。

江民瑜（2013）。學業情緒爲中介的自我調整學習模式之檢驗：以數學領域爲例。**當代教育研究季刊，21**（3），113-150。

朱綺鴻（1999）。**現職教師對教導數學歸納法意見初探**（未出版之博士論文）。國立臺灣師範大學科教研究所博士論文。

林小惠、熊召弟、林世華（2006）。具體影像空間教學策略與中學生空間能力之相關研究。**教育心理學報，37**（4），393-409。

邱美虹、高淑芬（1999）。類比對應對學生建構"原子結構"心智表徵之影響。**教育科學研究期刊，44**（1 & 2），31-59。

徐式寬、關秉寅（2011）。國民中小學教師資訊融入教學素養評量表之建構與調查。**科學教育學刊，19**（4），335-357。

高哲翰（2002）。**邏輯原理與應用**。臺北：揚智。

張春興（1995）。**張氏心理學辭典**（第二版）。臺北：東華。

黃志賢（2014）。數學建模－社會文化與集體論證的觀點。**科學教育學刊，22**（3），237-258。

教育部（2003）。**國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域**。臺北：教育部。

教育部（2014）。**十二年國民基本教育課程綱要總綱**。臺北：教育部。

陳瑞麟（2003）。**邏輯與思考**。臺北：學富。

陳沅、洪碧霞、林宜樺（2003）。**心智工具在融入式網路數學專題學習中應用效益之探討**。2003 網路專題學習與多元動態評量模式發展趨勢研討會。

陳沅（2007）。**資優學生知識移轉鷹架化模式效益之研究－以圖形推理學習系統爲例**（未出版之博士論文）。國立高雄師範大學工業科技教育研究所博士論文。

廖本裕（2010）。寫作歷程模式數位教學平臺之設計與實施成效之研究。**教育學刊，34**，109-140。

劉家樟、楊凱琳、許慧玉（2012）。小六學生不同代數表徵的解題表現、教師布題順序與代數教學信念之研究。**當代教育研究，20**（2），93-133。

二、西文部分

Armstrong, T. (1994). *Multiple intelligences in the classroom*. Alexandria, VA: ASCD.

Arslan, C., Göcmencelebi, S. I., & Tapan, M. S. (2009). Learning and reasoning styles of pre service teachers': Inductive or deductive reasoning on science and mathematics related to their learning style. *Procedia Social and Behavioral Sciences, 1*, 2460-2465.

Booth, L. (1984). *Algebra: Children's strategies and errors. A report of the Strategies and Errors in Secondary Mathematics Project*. Windsor, Berks: NFER-Nelson.

Chen, Y., & Hung, P. H. (2010). Development of a GSP integrated formative assessment system on geometric creativity. *Advanced Materials Research, 108*, 979-984.

D'Angelo, J. P. & West, D. B. (1999). *Mathematical thinking: Problem-solving and proofs* (2nd ed.). New York, NY: Prentice Hall.

Deloache, J. S., Miller, K. F., & Pierroutsakos, S. L. (1997). Reasoning and problem solving. In W. Damon (Ed.), *Handbook of Child Psychology* (5nd ed.). New York, NY: Wiley.

Gardner, H. (1999). *Intelligence reframed: Multiple intelligences for the 21st century.* New York, NY: Basic Books.

Gentner, D. (2010). Bootstrapping the minds: Analogical processes and symbol systems. *Cognitive Sciences, 34*, 752-775.

Gentner, D., & Smith, L. (2012). Analogical reasoning. In V. S. Ramachandran (Ed.), *Encyclopedia of human behavior* (2nd ed.; pp. 130-136). Oxford, UK: Elsevier.

Grimaldi, R. P. (1999). *Recurrence relations.* In K. H. Rosen (Ed.), *Handbook of Discrete and Combinatorial Mathematics*. Boca Raton, FL: CRC.

Harle, M., & Towns, M. (2011). A review of spatial ability literature, its connection to chemistry, and implications for instruction. *Journal of Chemical Education, 88*(3), 351-360.

Harris, P. L., & Nunez, M. (1996). Understanding of permission rules by pre-school children. *Child Development, 67*, 1572-1591.

Hoffer, T. B. (1997). High school graduation requirements: Effects on dropping out and student achievement. *Teachers College Record, 98*(4), 584-607.

Jonassen, D. H., & Yueh, H. P. (1998). Computers as mindtools for engaging learners in critical thinking. *Tech Trends, 43*(2), 24-32.

Jonassen, D. H. (1996). *Computer in classroom: Mindtools for critical thinking*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, Inc.

Jonassen, D. H. (2000). *Computers as mindtools for schools: Engaging critical thinking*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.

Jonassen, D. H., Peck, K. L., & Wilson, B. G. (1999). *Learning with technology: A constructivist perspective*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.

Kelley, W. G. & Peterson, A. C. (2000). *Difference Equations: An Introduction with*

Applications (2nd ed.). New York, NY: Academic Press.

Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.),. *Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 33-56). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren* Chicago, IL: The University of Chicago Press.

Kozulin, A. (1990). *Vygotsky's psychology: A biography of ideas*. Camdridge, MA: Harvard University Press.

Kuchemann, D. (1981). Algebra. In K. M. Hart (Ed.), *Children's understanding of Mathematics: 11-16* (pp. 102-119). London: John Murray.

Lohman, D. F. (1979). Spatial abilities: *A review and re-analysis of the correlational literature* (Technical Report No. 8). Standford University, Aptitude Research Project, Standford, CA.

Lohman, D. F. (1988). Spatial abilities as traits, processes, and knowledge. In R. J. Sternberg (Ed.), *Advances in the psychology of human intelligence* 4 (pp. 181-248). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Markovits, H. (1995). Conditioning reasoning with false premises: Fantasy and information retrieval. *British Joumal of Developmenl Psychology, 13*(1), 1-11.

Mayer, R. E. (1991). *Thinking, problem solving, cognition* (2nd ed.). New York, NY: Freeman and Company.

Menzies, T. (1996). Applications of abduction: knowledge-level modeling. *International Journal of Human-Computer Studies, 45*, 305-335.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Norman, D. A. (1993). *Things that make us smart: Defending human attributes in the age of the machine*. Reading, MA: Addison-Wesley.

Pears, R., & Bryant, P. E. (1990). Transitive inferences by young children about spatianl position. *British Joumal of Psychology, 81*(4), 497-510.

Presmeg, N. C. (1985). *The role of visually mediated processes in high school mathematics: A classroom investigation*. Unpublished Ph. D. dissertation, Cambridge University, England.

Qualifications and Curriculum Development Agency. (2011). *General teaching requirements*. Retrieved May 20, 2011, from http://curriculum.qcda.gov.uk/key-stages-3-and-4/About-the-secondary-curriculum/The-statutory-secondary-curriculum/index.aspx.

Reiss, K., Klieme, E., & Heinze, A. (2001). *Prerequisites for the understanding of proofs in the geometry classroom*. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), Proc. 25th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Math. Education (Vol. 4, pp. 97-104). Utrecht: PME.

Rogers, E. M. (1995). *Diffusions of innovation.* New York: Free Press.

Schunk, D. H., Pintrich, P. R., & Meece, J. L. (2008). *Motivation in education: Theory,* *research, and applications (3rd ed.)*. Upper Saddle River, NJ: Pearson.

Sweller, J. (2004). Instructional design consequences of an analogy between evolution by natural selection and human cognitive architecture. *Instructional Science, 32*, 9-31.

Thagard, P. & Shelley, C. P. (1997). Abductive reasoning: Logic, visual thinking, and coherence. In M. L. Dalla Chiara et al. (Eds.), *Logic and scientific methods* (pp. 413-427). Dordrecht: Kluwer

Vallance, M. (2008). Beyond policy: Stra tegic actions to support ICT integration in Japanese schools. *Australasian Journal of Educational Technology, 24*(3), 275-293.

Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(4), 356-366.

Wagner, S. & Parker, S. (1993). *Advancing algebra.* In P. S. Wilson (Ed), *Research ideas for the classroom: High school mathematics*. New York: Macmillan.

Wood, D., Bruner, J. S., & Ross, G. (1976). The role of tutoring in problem solving. *Journal of Child Psychology and Psychiatry, 17*(2), 89-100.

Wright, B. C., & Dowker, A. D. (2002). The role of cues to differential absolute size in children's transitive inferences. *Journal of Experimental Child Psychology, 81*, 249-275.

Yeh, S. W., & Lo, J. J. (2005). Assessing metacognitive knowledge in web-based call: A neural network approach. *Computers and Education, 44*(2), 97-113.

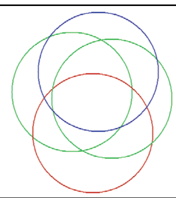
Zaslavsky, O. (1997). Conceptual obstacles in the learning of quadratic functions. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 19*(1), 2-42.

投稿日期：2016 年 07 月 20 日
修正日期：2017 年 02 月 20 日
接受日期：2017 年 03 月 24 日

附錄一：數學推理測驗（MCT）示例

螞蟻王國分土地，國王以圓畫分出區域賞給士兵，每個區域分給一位士兵，四個圓最多可以分成右圖，用 5 個圓來分最多可以分給幾個士兵？

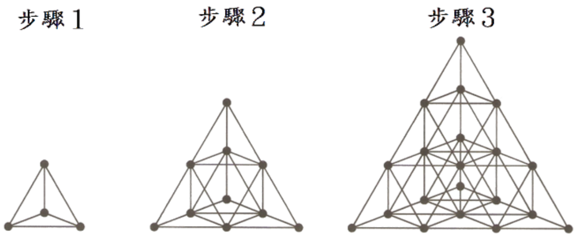
(1)10　(2)11　(3)12　(4)13　(15)14



下圖用頂點珠組成的骨架圖，由步驟一到步驟三的拼組方法以此類推，那麼步驟十的骨架圖會需要幾個頂點珠？

(1)100　(2)102　(3)199　(4)200

(5)250



附錄二：組型設計測驗（POT）示例

學習任務：用 8 條線設計一個分割平面最大化的組型

作業設計類型：ICT 組作業系統爲 GSP

作業設計問題情境：

某一位文化局長想在市中心的休閒廣場設計一個最璀璨的圖案，他公開甄選設計藍圖。設計規則是圖案由 8 條線所構成，當電源啓動時，每條線會按組型排列依序整齊出現，線之間的交會點將放射出像鑽石般亮光，請發揮創意設計出最璀璨的組型圖型。

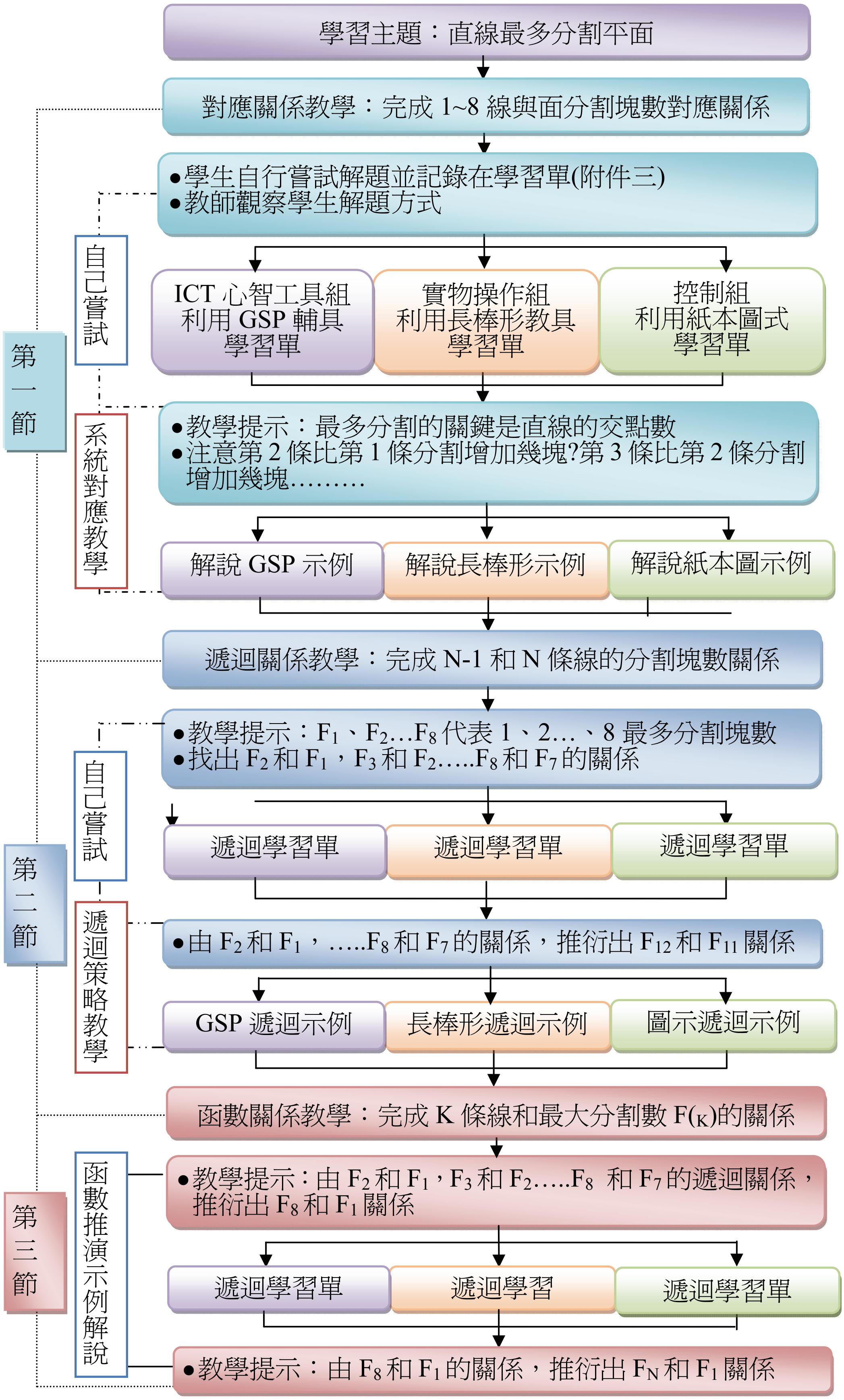
附錄三：ICT 邏輯推理問題解決學習單

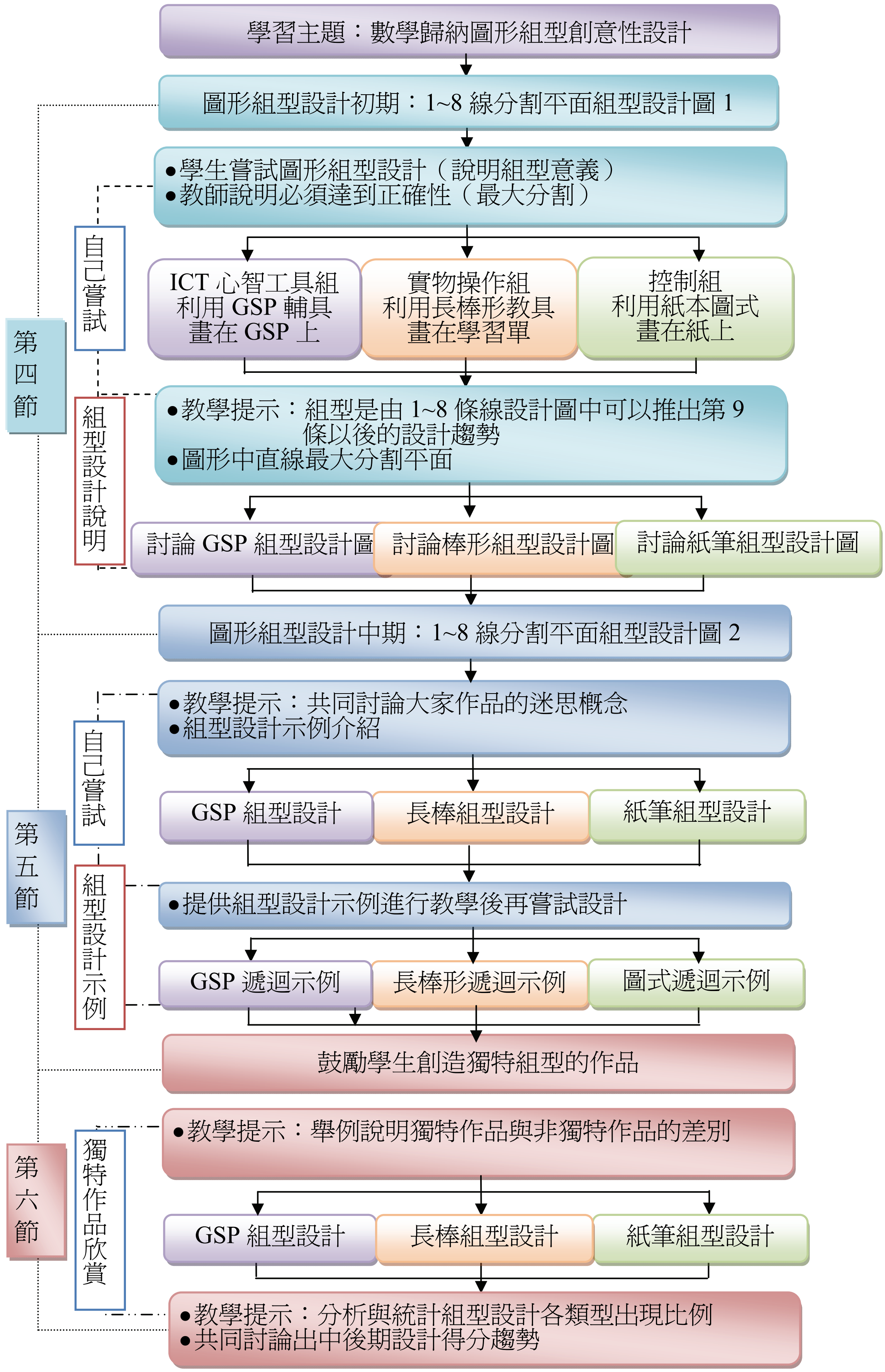
◎直線最大分割平面挑戰

雷射線 K	1	2	3	4	5	6	7	8
增加的交點數	0							
最多分割 F_K 塊	2	4						

K=1	F2=F1+2
K=2	F3=F2+3
K=3	
K=4	
K=5	
K=6	
K=7	
K=8	
K=12	
找出 F8 和 F1 的關係	

附錄四：數學歸納學習模組教學流程示例




學習主題：數學歸納圖形組型創意性設計
圖形組型設計初期：1~8 線分割平面組型設計圖 1
●學生嘗試圖形組型設計（說明組型意義）
●教師說明必須達到正確性（最大分割）
自己嘗試
第四節
ICT 心智工具組 利用 GSP 輔具 畫在 GSP 上
實物操作組 利用長棒形教具 畫在學習單
控制組 利用紙本圖式 畫在紙上
組型設計說明
●教學提示：組型是由 1~8 條線設計圖中可以推出第 9 條以後的設計趨勢
●圖形中直線最大分割平面
討論 GSP 組型設計圖
討論棒形組型設計圖
討論紙筆組型設計圖
圖形組型設計中期：1~8 線分割平面組型設計圖 2
●教學提示：共同討論大家作品的迷思概念
●組型設計示例介紹
自己嘗試
第五節
GSP 組型設計
長棒組型設計
紙筆組型設計
組型設計示例
●提供組型設計示例進行教學後再嘗試設計
GSP 遞迴示例
長棒形遞迴示例
圖式遞迴示例
鼓勵學生創造獨特組型的作品
●教學提示：舉例說明獨特作品與非獨特作品的差別
第六節
獨特作品欣賞
GSP 組型設計
長棒組型設計
紙筆組型設計
●教學提示：分析與統計組型設計各類型出現比例
●共同討論出中後期設計得分趨勢

Examining How the Technology-Based Learning Module Benefits Mathematical Induction Curricula in Elementary Schools

Yuan Chen

Teacher, Tainan Municipal Sin-Nan Elementary School

Chen-Yao Kao

Professor, Department of Special Education, National University of Tainan

ABSTRACT

The purpose of this study was to examine how the technology-based mathematical-induction-learning module influenced inference of elementary school students. A total of 82 sixth-graders from three regular classes were recruited to participate in this study. The three classes were randomly assigned to the three groups: the ICT group, the object-manipulation group, and the control group. The research procedures included a pre-test, implementation of technology-based learning module, and a post-test. All of the three groups experienced the same procedures. The only difference between the three groups was the way the learning module was taught. Through the analysis of covariance, the difference of the three groups' performances on mathematical reasoning was examined. In addition, these students' initial pattern-design ability and growth slope of this ability were also analyzed by the Hierarchical Linear Model. As the research results demonstrated, the ICT group performed better on general mathematical reasoning tasks than the object-manipulation group and the control group. The results also showed that the ICT learning module could enhance logical reasoning by providing the figural scaffolding, which helped students reflect and find out the key points in problem solving.

Key words: correspondence, function, logical reasoning, mathematical induction, recurrence