

由認知負荷觀點探討國中代數試題難度

侯志偉

臺南市忠孝國民中學 校長

洪碧霞

國立臺南大學教育學系 教授

林素微

國立臺南大學教育學系 教授

中文摘要

本研究從認知負荷的觀點，分析認知成分對於國中代數試題難度的解釋力。研究蒐集近十年國中基測與教育會考數學代數測驗試題共 65 題，對九年級 982 名學生施測。並以數的種類、表徵轉化、運算複雜度與方程式資訊等四項認知成分，實徵檢視認知成分編碼的適用性。測驗結果採用 Rasch 模式進行難度參數校準，以多元迴歸進行認知成分編碼對試題難度參數的預測分析。結果顯示表徵轉化、運算複雜度、方程式資訊對試題難度參數的解釋量約為 82%。整體而言，本研究所提出代數認知成分，初步試用對於試題的難度呈現合理解釋，可作為試題發展者及教師在代數測驗和教學之設計基礎，以及學生學習補充教材的規劃。

關鍵字：代數測驗、認知成分、試題難度參數、迴歸分析

壹、緒論

一、國中代數學習

數學學習與能力的建立是一項重要的公民素養，青少年若無法有效的達成數學學習的能力指標，未來在社會階層中亦會在往上流動的過程中遭遇阻礙。代數推理能力的建立在數學領域中更是極為重要的目標，良好代數能力的具備不僅是高等數學的入門，更是在生活中邏輯思考能力的基礎。在國中階段數學課程希望為學生建立的能力中，教導學生運用代數推理解決問題，也是相當重要的指標之一（蘇義翔、洪碧霞，2015）。

在國中數學學習領域課程中，將「代數」定義為「使用文字符號代表數」。代數學習是數學抽象化與形式化的一個重要步驟，其中的推論、歸納、演繹等技能，亦與其他科學的研究都極為相關（林曉芳、余民寧，2001），可知代數在數學學習領域中佔有非常重要的地位。代數問題是學生思考及知識合成訓練中的重要歷程，主因代數能充分顯示表徵問題與抽象思考的能力，而且文字型的代數問題具有無法立即使用明顯方法或步驟得到答案的特性，可由學生分析問題與找到答案之間的過程中，以透過認知成分的分析，了解其代數學習狀況。所以對於代數學習困難的學生，教師們若發現學生的錯誤觀念或遭遇挫折而沒有立即診斷與補救，皆會影響學生以後有關代數的學習，甚至放棄學習，導致未來在數學學習上的低成就。

目前代數在國中數學學習單元的安排上，七年級部分為一元一次方程式、二元一次方程式及二元一次聯立方程式。此階段沒有將基礎建立好，將會影響八年級的線型函數、多項式、一元二次方程式、二次函數等學習。代數主題是生活中與未來高等數學學習的主要概念，也是數學教育應持續努力與研究的重要課題。而且以文字符號代表數，是國中學生從算術學習進階到代數學習的一個重要橋樑，也是形成數學抽象化與形式化的重要步驟（郭汾派、林光賢、林福來，1989）。

學者對於「代數學習」的研究文獻，分別指出代數學習時出現的錯誤行為與困難，包括：1. 當題目中文字敘述較長或較複雜時，學生無法掌握問題的重點，往往不知道該從何下手？。2. 解方程式缺乏數學知識、未能掌握解題歷程及較少使用後設認知。3. 文字題解題時，有的學生可以把題目寫成代數式，但不瞭解其意義；有的學生會列式，但不會運算；也有學生一開始就不懂得如何把文字訊息轉換成符號來運算（徐偉民、曾于珏，2013；楊清德、陳仁輝，2010）。

二、代數學習認知成分

認知成分分析可以對試題難度或複雜度的變異來源加以操作性界定，期望透過控制影響試題難度的成分，進而提供直接的構念效度證據。也就是以深入分析瞭解試題難度的變異來源，將相關的認知成分與適切的心理計量模式結合運用，更有效率的產出教育或心理測驗，並對測驗效度的論證能提供嚴謹的理論支持與解釋（蘇義翔、洪碧霞，2015）。洪碧霞、林素微與林娟如（2006）曾針對臺灣國小六年級的數學成就測驗，從認知負荷的觀點進行試題難度或複雜度的分析。同時洪碧霞、蕭嘉偉、楊佩馨（2008）

亦從認知負荷觀點分析國小二至四年級數與計算成就測驗。這些研究結果均能對教學實務提供豐富的回饋資訊，有利後續補救教學介入焦點的擬定。Cirino、Tolar與Fuchs（2013）等人針對七到八年級的114位中學生，進行算術技能與代數（包含程序和概念知識）有關認知成份的研究，認為代數運算包括算術概念，並提出：「程序性和概念性知識是可以部分分開使用」，意即學生可以掌握程序性知識而沒有概念性的知識，且不一定獲得概念性知識而還沒有獲得一些程序性知識，研究結果亦認為學生接受的程序和概念指令的順序不影響整體的程序或概念的學習（顏錦偉，2016）。

但上述研究之對象多為國小學童，使用的分析試題為學習成就線上資料庫。然而，國中生的代數學習成就，更是其能否有效學習高級中學數學代數課程的基礎。然目前對於國中代數學習的研究，卻仍多偏重於教學方法與解題策略等面向，代數認知對於題目難度解釋力的探討仍較缺乏。顏錦偉（2016）在國中生代數解題的研究中也發現，學生在進入後期中等教育階段的升學制度主要以考試為主，而傳統校內考試內容偏向知識的記憶、理解與應用的題目，未能觸及高層次思維。教師在評量完成後，也無法對學生在題目的認知構面做出分析，以此評量結果作為學生的數學能力似乎不足，因為知識的記憶、理解與應用是學習的基本認知層次，必須加上知識的分析、綜合與創新等高階的認知層次，才能完整呈現學生的數學能力。所以，題目難度與認知層面的連結是評量中的重要一環，除了包括特定的概念和學習技巧，也強調學生解題認知的過程，更能了解學生大腦的運作思維與解題表現的能力。

所以，了解國中生代數學習認知層面的情形，透過分析其對運算能力、符號表徵的轉換，方程式資訊邏輯推理應用與結果解釋等數學能力的表現，將可探索學生在學習上的困難。因此，認知成分分析的結果可有效提供教學者在實務工作上的回饋，更可透過試題難度與複雜度的分析，規劃學生代數學習成就提升策略的訂定。然各校教師以為評量方式的學校定期考試，在標準化與嚴謹度較為缺乏。故本研究以學生對國中教育會考與基本學力測驗代數試題的作答結果以為資料來源，並在九年級學期初完成施測，更可以試題認知成分分析做為教師提升學生代數學習之參考。

三、研究目的

- （一）發展臺灣學生代數試題認知成份編碼架構，探討認知成分對代數試題難度變異的解釋力。
- （二）探討上述認知成分架構下，不同認知成份與國中代數測驗試題難度的關聯。

四、研究問題

- （一）本研究所提出的代數認知成分編碼架構對試題難度參數變異的解釋力為何？
- （二）在上述認知成分架構下，不同認知成份與國中代數測驗試題難度的關聯程度為何？

貳、文獻探討

一、代數的定義與我國國民中學代數學習內容

在思考及知識合成的學習過程中，代數解題能力的養成是非常重要的，而以「代數」為研究主題，主因代數能充分顯示表徵問題與抽象思考的能力，有些代數問題非僅有單純的演算式，更具有無法使用直接的運算方法或步驟得到答案的特質，故瞭解學生對代數問題與尋求解答之間的歷程是很重要的議題（Hung, Hwang, Lee, & Su, 2012）。

Kieran在1992年以歷史發展而提出的觀點，認為代數分為文辭代數、簡略代數與符號代數等三階段，並分別以使用一般語言描述來解決特定類型的問題，進而使用簡縮文字表徵，到能使用文字符號代替已知及未知的數和量與盡可能表達一般性解法，其並將代數視為發現數學真理的特殊步驟。Usiskin（1999）認為代數是種具有「語言」概念的重要推理工具，包含已經歸納的算術、解決某特定問題有關步驟的研究、數量之間關係的研究、數學結構的研究等四部分。Herbert與Brown（1999）則認為代數思考是使用數學符號與工具去分析不同的狀況，可分為從問題中擷取訊息，用文字、表格、圖像和方程式等數學的方式將訊息表現出來，說明與應用數學的研究結果，如解未知數、樣式的推論和定義函數關係等三部分（陳彥廷、柳賢，2009）。而美國國家數學學會（National Council of Teachers of Mathematics，簡稱NCTM）（2000）也指出，理想中的代數教學不該只是移動符號，應該加強非正規代數經驗，透過樣式規律的學習，建置一個學生能主動探索、啟動代數思維的教學情境，從不同形式中辨識及延伸樣式規律，運用樣式來預測，最後才引入代數符號的學習。國內學者陳嘉皇（2007）認為代數是透過許多暗藏樣式規律的情境活動，讓學習者運用數與計算的基礎技能，不斷培養觀察、分析、推論、歸納、類比等獨特的自我解題策略或想法，進而促發演繹等邏輯推理能力，最後終能瞭解代數符號的運算，以至於對所吸收的知識內容產生結構化的思維。以上學者在代數的定義中，也提及教師利用學習者察覺樣式的想法與過程，可幫助學習者建構較完備的數學概念。因此，代數不只是解出未知的方程式，同時也是歸納數量關係和樣式規律的學習工具（孫慧茹、洪碧霞，2013）。

根據教育部在2003年提出的課程標準中，將代數定義為日常生活及自然生態中到處可見數與形，而各種的數與形都有一些規律，數學學習的探討就是這些規律，而代數也是來自這樣的理念。代數的符號、方法、與系統正是探討這些規律、並為這些規律建立模式的語言與工具（教育部，2003）。

依據國際數學與科學成就趨勢調查（Trends in International Mathematics and Science Study，簡稱TIMSS）2011年對八年級學生代數學習的解釋，其認為「代數」內容領域包含數型、代數式和方程式及其衍生之公式與函數三個主題。並認為八年級學生應能使用及化簡代數方程式，求解線型函數、不等式及聯立方程式問題，並能運用代數模型處理真實世界問題以及運用代數概念解釋其間的關係性。而我國在國民中學九年一貫數學領域課程綱要中，將代數學習內容由七年級的以符號代表數至一元一次與二元一次方程式，進而了解二元一次方程式在坐標平面上的幾何意義，並學習一元一次不等式，與能

在數線上圖示。八年級學習二次式的乘法公式、簡單根式與有理式，多項式的四則運算與因式分解。在九年級部分學習二次函數的意義與圖形，並能解決二次函數的相關問題。其學習脈絡由題目中的四則運算，進而至能依文字與圖表進行解決問題的推論，並以數學方程式或多項式運算來求得答案。

二、影響國中學生代數學習的因素

在數學學習過程中，運算能力是基本的數學學習技能，學生對於運算無法有效使用，將導致其學習進展產生阻礙。在運算學習過程中，國小以四則運算為主，除基本的數字加減乘除外，算式中的括號法則觀念，也是學生四則運算能否順利執行的重要因素。到了國中階段，加入絕對值與次方的概念，絕對值與距離觀念加以結合，把乘法運算中的自乘表示簡化為以指數的型態，可更經濟的呈現運算式子。再者，於方程式解題與距離計算的需要，進入了無理數的概念根號的四則運算，這部分的學習對學生而言更加抽象，也是學習落後學生常面臨的困境。

Lesh (1981) 曾指出表徵是指心智過程模式化後所使用的符號系統，例如：圖表、符號或文字等，也是內在概念的外在具體化 (劉家樟、楊凱琳、許慧玉, 2012)。所以，在數學的學習中，學生能否透過表徵的型式轉換，將文字或圖表的轉換為數學算式實為重要。數學教育的學習準則中就指出了表徵的重要性，數學思考邏輯中的表徵轉換，關係到學生對題目的理解和操作。在學習準則中以教導「有彈性的表徵」和「適當的運用」為數學學習的重要目標。代數表徵在數學學習上具有運思與溝通的價值，教師在教學中必須讓學生充分運用表徵的轉換，更能讓孩子將日常中遇到的生活數學情境，轉換為有效的數學算式，通過運算來解決問題 (Cirino, Tolar, & Fuchs, 2013; Collis, 1975; Hung, Hwang, Lee, & Su, 2012; NCTM, 2000)。

洪有情在2005年至2007年陸續針對「代數運算概念」進行長期性探究。其研究發現學生在代數運算上出現許多錯誤。例如，學生在進行題目運算時，對於算式的重組容易產生困難。題目提供的算式，必須經過多項式四則運算的概念，利用乘法公式或十字交乘法進行因式分解。而對配方法學習的熟練與否，更直接影響到極值的求取、二次函數的圖形繪製，更是學生容易產生放棄數學學習的重要瓶頸。因此，在算式重組的能力培養，也密切關係著學生是否能在代數學習上得心應手 (陳彥廷、柳賢, 2009)。

代數式的學習，是學生從算術的思考轉化到代數思考模式的一個重要階段，更是從具體概念到抽象化概念的一個重要歷程，如同是一座橋梁聯繫著算術的思維至代數思維模式的建構。而且，利用方程式的運算，更可將數學算式經濟有效的予以處理。熟練代數的基本運算及解方程式是國民中學階段的數學學習目標之一，方程式運算更是其他許多重要數學概念的基礎，如配方法、函數等 (Bejar, 2013; Chen, Macdonald, & Leu, 2011)。Muth (1991) 認為學生對於代數文字題的解題能力會因為文字題中無關訊息的干擾而無法解決問題。當文字敘述較長時，學生若無法正確找到關鍵詞句，將產生問題整合上的困難。因此，題目中方程式資訊提供的程度，與學生作答的順利有著緊密連結 (陳嘉皇、梁淑坤, 2014)。

三、代數能力測驗的認知成份分析

由認知心理學的觀點而論，代數推理的構念表徵相當於在探討及界定代數問題解題歷程的認知複雜度或難度。為了設計和預估試題難度的來源和水準，必須先探究隱含在試題中可能的影響難度的成分（蘇義翔、洪碧霞，2015）。

代數領域的認知成份分析，是許多學者關心的議題。Dimitrov與Raykov（2003）分析15題線性方程式的代數測驗，將代數的解題步驟拆解成10個程序，能有效預測95%的試題難度變異。Holling等人（2008）以8個規則命題設計的11題統計文字題為分析標的，分析11至13年級的學生的試題反應，結果顯示LLTM與Rasch模式所獲得的參數相關為0.9，亦能有效掌握試題的難度來源（洪碧霞、蕭嘉偉、林素微，2010；Janssen, 2010）。

在臺灣學生學習成就評項資料庫的線上數學測驗分析中，洪碧霞、林素微、林娟如（2006）針對國小六年級學生的作答結果，找出了計算量、步驟數、表徵轉化、關係推衍、情境新穎、抽象邏輯等六個成份，而這六個認知成份與試題難度的複相關為.52（解釋量約為27%），並發現在代數領域部分，計算量的相關係數達到.70。洪碧霞、蕭嘉偉、楊佩馨（2008）分析國小二至四年級數與計算成就測驗的結果，找出了運算種類數、未知數表徵轉換、除法加權等三個成份，並以這三成份加總，作為試題的總認知負荷指標。研究結果發現，運算種類數、未知數表徵轉化、除法加權三項認知負荷成份，可解釋53%的試題難度變異。其中運算種類數與試題難度的關聯最高，當三成份同時呈現時，表徵轉換的標準迴歸係數最高。

Embretson與Daniel在2008年提出有關數學問題解題中了解和量化認知複雜性水準的研究，並預測數學問題解決難度分析的認知成份分析，包含編碼（Encoding）、需要方程式（Equation Needed）、轉譯方程式（Translate Equations）、產生方程式（Generate Equations）、圖像可視化（Visualization）、最高知識（Maximum Knowledge）、方程式回想數量（Equation Recall Count）、子目標數量（Subgoals Count）、相對定義（Relative Definition）、程序層次（Procedural Level）、計算計數（Computational Count）、決策處理（Decision Processing）等十二項。估計出試題難度值介於-1.80~1.80之間，分析美國研究生入學考試（Graduate Record Examinations，簡稱GRE）數學問題剔除不合乎標準的11題，以留下101道題目做LLTM和迴歸分析。試題難度估計與下列八個認知成份有顯著正相關，即編碼，需要的方程式，轉譯方程式，產生方程式，圖像可視化，最高知識，相對定義和決策處理等項目；而其他四項，方程式回想數量、子目標數量、程序層次和計算計數這四項則未達相關顯著水準。這十二項認知成份對題庫的模型變量與項目難度估計的相關性達到高度相關（ $r = .834$ ），對題庫難度變異解釋力達67%，可見這是一個試題難度強大的預測模型。

由於Embretson與Daniel（2008）以迴歸方法和線性logistic測驗模式（The Linear Logistic Test Model，簡稱LLTM）方法對大型資料庫數學問題解決的認知複雜度假設模型的分析的支持，洪碧霞、蕭嘉偉、林素微（2010）分析臺灣學生在國際學生能力評量計畫（the Programme for International Student Assessment，簡稱PISA）2006數學素養試題的認知成份中，找出了方程式資訊、圖形資訊、認知類別三項認知成份，研究結果發

現此三項認知成份，對於臺灣PISA 2006試題難度參數可解釋77%的變異量，其中認知類別為較重要的預測成份。研究並指出，方程式與圖形資訊解讀應用為補救教學推動的首要目標，其後再提供學生情境新穎或非例行問題，以此步驟推動，可讓學生藉此獲得各種生活情境數學問題洞察的經驗，並提升數學解決問題的認知層次。

在代數推理測驗自動化命題模式的研究中，蘇義翔、洪碧霞（2015）分析國小五、六年級學生在代數自動化命題測驗的結果中，找到運算子、表徵轉換與推論複雜度三個認知成份。並發現三個成份與難度參數間存在極高的相關，尤其以運算子與試題難度參數的相關最高，約有62%的難度預測力，可解釋大部分試題難度參數的變異。透過對難度參數的多元迴歸分析發現，運算子和表徵轉換兩項成分可有效共同解釋78%的試題難度參數變異，其標準化迴歸係數分別為0.56、0.46。也就是每增加運算子認知成分一個單位，對試題難度參數大致會提升0.73單位左右；而每增加表徵轉換認知成分一個單位，對試題難度參數大致會提升0.57個單位左右。其中又以運算子的迴歸係數最大，顯見該代數推理測驗中，運算子明顯決定試題難度參數的大小。本研究綜合以上文獻與研究，提出數的種類、表徵轉化、運算複雜度、方程式資訊等四個認知成份，來解釋國中九年級學生代數測驗試題的難度變異。

參、研究方法

一、研究設計

本研究之設計流程如圖1，目的在提出認知成分依據近十年國中基本學力測驗及教育會考中之代數試題，作為測驗試題品質監控的實徵建議。此模式先從測驗試題內容領域的認知成分文獻開始分析，並歸納文獻相關要義、進而選定核心認知成分、操作性界定成分編碼邏輯、針對試題進行成分編碼、判斷試題難度層次、再以實際施測獲取試題難度參數、檢視認知成分對試題難度的解釋力。

依據文獻回顧的結論，本研究選取「數的種類」、「表徵轉化」、「運算複雜度」、「方程式資訊」等四項難度成分變項，清晰定義其認知運作，對國中九年級學生進行測試，並以Rasch模式進行單參數（難度）校準試題參數，分析不同題型試題難度參數與認知負荷的分配差異，再以多元迴歸統計分析實徵檢驗該認知成分架構對試題難度參數的解釋力。

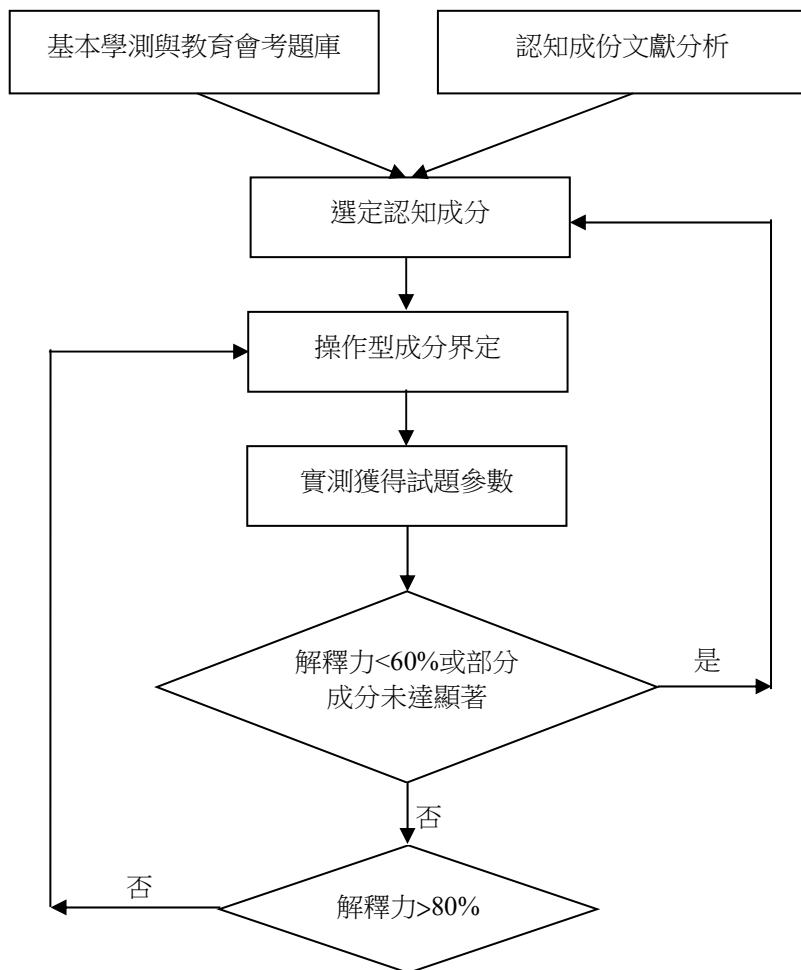


圖1 代數試題認知成分分析流程

二、研究樣本

本研究採立意抽樣，施測樣本取自臺南市國中學習夥伴學校，包含東區及中西區三所市立國民中學九年級學生共982人進行施測，表1呈現受試樣本人數分配。其中甲校十一班男生156人、女生152人、共308人、乙校十八班男生194人、女生163人、共357人、丙校十二班男生115人、女生202人、共317人，特別注意的是丙校原為女校，近幾年始轉型為男女合校，故女生比例較男生為高。

表 1

代數測驗受測樣本人數分配

校別	A 卷			B 卷			C 卷			D 卷			合計		
	男	女	合計	男	女	合計	男	女	合計	男	女	合計	男	女	合計
甲	43	45	88	44	39	83	41	40	81	28	28	56	156	152	308
乙	43	30	73	45	31	86	59	46	105	47	46	93	194	163	357
丙	30	51	81	33	46	79	33	45	78	19	60	79	115	202	317
合計	116	126	242	122	126	248	133	131	246	94	134	228	465	517	982

三、研究工具

(一)測驗雙向細目

本研究工具為研究者收集100年至106年國民中學基本學力測驗與教育會考代數範圍試題編製而成之試卷文獻。依國民中學九年一貫數學學習領域課程內容包含「一次方程式(包含一元一次方程式、二元一次方程式)」、「比例、平方根與畢氏定理」、「等差數列與級數」和「一元二次方程式、因式分解、乘法公式」等四種題型。題數分別為25、13、5、22題，合計65題。其中，一次方程式、比例與平方根、等差數列與級數和二次方程式及因式分解等四種題型主要在測驗九年級學生的代數能力，瞭解學生是否能辨識及延伸樣式，並運用樣式來預測後續的結果。呈現樣式的方法分別為數字、文字、以及文字描述搭配圖表或圖形等三種形式。

在組卷設計方面，從題庫中抽取5題作為共同試題（預估難度為難1題、中2題，易2題），編成A、B、C、D四卷，每卷20題。測驗時間以一節課45分為限。Rasch參數分析以四卷間5題共同試題進行試題參數的同時估計，因此四卷的試題參數是在同一個量尺上。5題共同試題的題號分別為E1、E2、E3、E4、E5。表2呈現測驗題型與認知層次雙向細目。表2的認知負荷層次是依據各認知成分編碼加總後進行歸類（認知成分編碼及認知負荷層次請參照附錄表1）。認知負荷層次分類的標準為編碼總和在4以下歸類為層次一，總和在5~6歸類為層次二，總和在7~8歸類為層次三。

表2

代數測驗不同內容與認知層次題數分配

認知 負荷 層次	內 容									
	一元 一次 方程式	二元一 次聯立 方程式	直角坐 標與二 元一次 方程式 圖形	比例	平方根 與畢式 定理	等差數 列與級 數	一元 二次 方程式	因式 分解	乘法公 式與多 項式	題數
層次 一 負荷4 以下	D2 B2 D6	A1 C4 D4 B1	D3 B3 C3 D8 B13		B11 E1 D13	B15			C1 D1 B16 A7	20
層次 二 負荷 5-6	A3 C13 B6		A2 E3 A6 C14	D11 C11 B14		C16	B8 D15 E2	D14 A12 C8	A4 C2 C7 B4	22
層次 三 負荷 7-8	A16 A13	A8 D7 B12 C12		A14 B17 C18 D17	A11 C6 D18	A15 D16 E4	A17 C15 B18 C17 A18	B7	E5 D12	23
題數	8	8	9	7	6	5	8	4	10	65

(二) 認知成份界定與編碼架構

本研究選取「數的種類」、「表徵轉化」、「運算複雜度」、「方程式資訊」等四項認知成分變項，認知成分的界定及編碼架構如表3所示，操作性定義如下：

1. 數的種類：解決問題所需之運算的數字與未知數型態。試題中使用的數的種類包含有理數、根號、一元一次的未知數、二元一次的未知數至未知數的高次方的運算。
2. 表徵轉化：不同的表徵形式推導未知數與算式歷程的轉換幅度。編碼大小分別為從無需進行未知數與算式推導、到由題目敘述的文字進行未知數與算式推導，至必須結合文字與圖形（表）進行未知數與算式推導。
3. 運算複雜度：代數問題情境中，算式必須進行化簡的複雜程度，考量的因素包含利用算式求得答案過程中，算式是否需要進行四則運算、因式分解或配方法等過程。
4. 方程式資訊：題目提供解題所需方程式訊息的程度。代數試題需經由列式進而求解，題目提供的方程式資訊程度，會影響學生是否能建構方程式，再順利執行求解的歷程。

表 3

代數測驗試題認知成分的界定及編碼架構

成分	編碼為0	編碼為1	編碼為2	編碼為3
數的種類	有理數（包含整數與分數）運算	具次方有理數的運算	(1)一次式的運算 （方程式、多項式、函數） (2)無理數的運算	二次式（含以上）的運算
表徵轉化	算式明確無需進行未知數或算式推導	從文字的描述推導未知數與算式	從文字的描述與圖形或統計表推導未知數與算式	na
運算複雜度	題目中算式無需化簡	算式需以四則運算進行化簡	題目中算式需利用因式分解進行化簡	題目中算式需利用配方法進行化簡
方程式資訊	不需使用方程式	題目提供直接可套用的數學方程式	題目提供描述方程式，或常見定義公式	題目未提供方程式，須由學生自行建構

註：na表示不適用（not applicable）

(三) 試題編碼示例

以下表4至表7為針對各成分的界定及編碼架構提出若干個試題示例，以利溝通成分編碼的意涵。選定之題目為A、B、C、D四卷共同題，題目認知負荷涵蓋層次一至層次三。題目內容包含一次方程式、二次方程式、比例、等差數列級數。

表 4

數的種類編碼示例

數 的 種 類	<p>題目： $x = -3$，$y = 1$ 為下列哪一個方程式的解? (105 會考) (A) $x + 2y = -1$ (B) $x - 2y = 1$ (C) $2x + 3y = 6$ (D) $2x - 3y = -6$</p>	<p>題目： 判斷下列各式的值，何者最大? (104 會考) (A) $25 \times 13^2 - 15^2$ (B) $16 \times 17^2 - 18^2$ (C) $9 \times 21^2 - 13^2$ (D) $4 \times 31^2 - 12^2$</p>
	<p>說明： $x = -3$，$y = 1$ 代入(A) $(-3) + 2 \times (1) = -1$ 此為整數運算，編碼為 0。</p>	<p>說明： 此為整數的次方運算，編碼為 1</p>
	<p>題目： 若有一等差數列，前九項和為 54，且第一項、第四項、第七項的和為 36，則此等差數量的公差為何? (103 會考) (A) -6 (B) -3 (C) 3 (D) 6</p>	<p>題目： 一元二次方程式 $x^2 - 8x = 48$ 可表示成 $(x - a)^2 = 48 + b$ 的形式，其中 a、b 為整數，求 $a + b$ 之值為何? (106 會考) (A) 20 (B) 12 (C) -12 (D) -20</p>
	<p>說明： $\begin{cases} \frac{(a + 8d) \times 9}{2} = 54 \\ a + (a + 3d) + (a + 6d) = 36 \end{cases}$ 此為一次方程式運算，編碼為 2</p>	<p>說明： $x^2 - 8x + 16 = 48 + 16$ $(x - 4)^2 = 48 + 16 \therefore a = 4, b = 16$ 此為二次方程式運算，編碼為 3</p>

表 5

表徵轉化編碼示例

表 徵 轉 化	<p>題目： 一元二次方程式 $x^2 - 8x = 48$ 可表示成 $(x - a)^2 = 48 + b$ 的形式，其中 a、b 為整數，求 $a + b$ 之值為何? (106 會考) (A) 20 (B) 12 (C) -12 (D) -20</p>	<p>題目： 若有一等差數列，前九項和為 54，且第一項、第四項、第七項的和為 36，則此等差數量的公差為何? (103 會考) (A) -6 (B) -3 (C) 3 (D) 6</p>								
	<p>說明： 不需進行未知數推導，編碼為 0。</p>	<p>說明： 由文字敘述推論未知數與算式，編碼為 1。</p>								
	<p>題目： 右圖為歌神 KTV 的兩種計費方案說明，若曉莉和朋友們打算在此 KTV 的一間包廂裡連續歡唱 6 小時，經服務生試算後，告知他們選擇包廂計費方案會比人數計費方案便宜，則他們至少有多少人在同一間包廂歡唱? (103 會考) (A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9</p>	<p>題目： 桌面上有甲、乙、丙三個圓柱形的杯子，杯深均為 15 公分，各裝有 10 公分高的水，且下表紀錄了甲、乙、丙三個杯子的底面積，今小明將甲、乙兩杯內的水倒入丙杯，過程中水沒溢出，使得甲、乙、丙三杯內水的高度比變為 3:4:5，若不記杯子厚度，則甲杯內水的高度變為多少公分? (103 會考)</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th></th> <th>底面積(平方公分)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>甲杯</td> <td>60</td> </tr> <tr> <td>乙杯</td> <td>80</td> </tr> <tr> <td>丙杯</td> <td>100</td> </tr> </tbody> </table> <p>(A) 5.4 (B) 5.7 (C) 7.2 (D) 7.5</p>		底面積(平方公分)	甲杯	60	乙杯	80	丙杯	100
		底面積(平方公分)								
甲杯	60									
乙杯	80									
丙杯	100									
<p>說明： 由文字與圖形推論未知數與算式，編碼為 2。</p>	<p>說明： 由文字與圖表推論未知數與算式，編碼為 2。</p>									



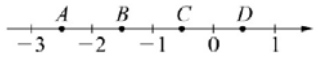
表 6

運算複雜度編碼示例

<p>題目： 小華帶 x 元去買甜點，若全買紅豆湯圓剛好可買 30 杯，若全買豆花剛好可買 40 杯，已知豆花每杯比紅豆湯圓便宜 10 元，依題意可列出下列哪一個方程式？（101 基隆）</p> <p>(A) $\frac{x}{30} = \frac{x}{40} + 10$ (B) $\frac{x}{40} = \frac{x}{30} + 1$ (C) $\frac{x}{40} = \frac{x+10}{30}$ (D) $\frac{x+10}{40} = \frac{x}{30}$</p>	<p>題目： 若 a、b 為兩質數且相差為 2，則 $ab+1$ 之值可能為下列何者？（106 會考） (A) 39^2 (B) 40^2 (C) 41^2 (D) 42^2</p> <p>說明： 設 $b = a + 2$ 代入，$a(a+1)+1 = a^2 + 2a + 1 = (a+1)^2$ 因式分解運算，編碼為 2。</p>
<p>運算說明： 題目中的算式無需進行化簡，編碼為 0。</p>	
<p>題目： 若有一等差數列，前九項和為 54，且第一項、第四項、第七項的和為 36，則此等差數量的公差為何？（103 會考） (A) -6 (B) -3 (C) 3 (D) 6</p> <p>說明： $\begin{cases} \frac{(a+8d) \times 9}{2} = 54 \\ a + (a+3d) + (a+6d) = 36 \\ a+4d = 6 \\ a+3d = 12 \end{cases}$ 算式以四則運算進行化簡，編碼為 1。</p>	<p>題目： 一元二次方程式 $x^2 - 8x = 48$ 可表示成 $(x-a)^2 = 48+b$ 的形式，其中 a、b 為整數，求 $a+b$ 之值為何？（106 會考） (A) 20 (B) 12 (C) -12 (D) -20</p> <p>說明： $\begin{aligned} x^2 - 8x + 16 &= 48 + 16 \\ (x-4)^2 &= 48 + 16 \therefore a = 4, b = 16 \end{aligned}$ 配方法運算，編碼為 3。</p>

表 7

方程式資訊編碼示例

<p>題目： 下列數線上有 A、B、C、D 四點，根據圖中各點的位置，判斷哪一點所表示的數與 $11 - 2\sqrt{39}$ 最接近？（103 會考）</p>  <p>(A) A (B) B (C) C (D) D</p> <p>說明： 不需使用方程式，編碼為 0。</p>	<p>題目： 一元二次方程式 $x^2 - 8x = 48$ 可表示成 $(x-a)^2 = 48+b$ 的形式，其中 a、b 為整數，求 $a+b$ 之值為何？（106 會考） (A) 20 (B) 12 (C) -12 (D) -20</p> <p>說明： 題目提供直接可套用的方程式，編碼為 1。</p>
<p>方程式資訊 題目： 坐標平面上，某個一次函數的圖形通過 (5、10)、(10、-10) 兩點，判斷此函數的圖形會通過下列哪一點？（105 會考重考） (A) $(\frac{1}{7}, 9\frac{4}{7})$ (B) $(\frac{1}{8}, 9\frac{5}{8})$ (C) $(\frac{1}{9}, 9\frac{7}{9})$ (D) $(\frac{1}{10}, 9\frac{9}{10})$</p> <p>說明： 設 $y = ax + b$，$\begin{cases} 0 = 5a + b \\ -10 = 10a + b \end{cases}$</p>	<p>題目： 若有一等差數列，前九項和為 54，且第一項、第四項、第七項的和為 36，則此等差數量的公差為何？（103 會考） (A) -6 (B) -3 (C) 3 (D) 6</p> <p>說明： $\begin{cases} \frac{(a+8d) \times 9}{2} = 54 \\ a + (a+3d) + (a+6d) = 36 \end{cases}$ 題目未提供方程式，需由學生自行建構，編碼為 3。</p>

四、資料分析

本研究進行下列資料分析：

1. 以ITEMAN進行傳統測驗項目分析，評鑑試題參數與測驗信度的適切性。
2. 以ConQuest進行Rasch難度參數校準。
3. 以Pearson積差相關分析試題Rasch難度參數與認知成分之間的相關。
4. 以多元迴歸分析，檢視認知成分編碼模式對試題難度參數變異的解釋力。

肆、研究結果與討論

對於第一線國中數學教師而言，試題難度參數的統計資訊在其教學應用上會有其限制之處，本研究提出一套國中代數推理試題認知成分的分析架構，對代數推理試題認知成分進行評定，希望合理解釋試題難度參數的變異來源。研究中發展出一個四成分的代數推理試題認知成分分析架構，並以此四項認知成分對試題實徵難度參數的預測力，探討此一成分分析架構的適用性。

一、國中代數能力測驗的心理計量特徵

1. 傳統項目分析

表8為A、B、C、D四卷的傳統項目分析摘要表。四卷的內部一致性分別為0.80、0.84、0.81與0.86，平均答對率分別為0.50、0.52、0.54與0.56，且全部都在0.25以上。在鑑別度方面，四卷的平均鑑別度分別為0.45、0.50、0.47與0.52。四卷的平均點二系列相關（point-biserial correlation）分別為0.59、0.65、0.61與0.68。整體而言，此份代數測驗的難度（答對率）適中，並具有適切的鑑別度。

表8

國中代數測驗A、B、C、D四卷傳統項目分析摘要

卷別	A 卷	B 卷	C 卷	D 卷
題數	20	20	20	20
受試人數	242	248	264	228
平均得分	9.93	10.42	10.87	11.19
得分標準差	4.31	4.82	4.36	4.83
偏態	.28	.25	.06	.02
峰度	-.88	-.97	-.74	-1.09
平均答對率	.50	.52	.54	.56
平均鑑別度	.45	.50	.47	.52
Alpha	.80	.84	.81	.86
平均點二系列相關	.59	.65	.61	.68

2. 單參數試題難度分析

本研究採用古典測驗理論分析試題答對率與鑑別度，以Rasch模式分析試題難度參數。表9呈現本測驗試題Rasch難度值的分佈（item map），附錄2表則呈現本測驗65題的試題答對率、鑑別度、點二系列相關、難度參數及成分編碼對照。由資料顯示可發現，

運算複雜度較高的題型，難度值也相對較高，而數的種類的認知成分，在難度值的分佈則較分散。

表10為第一作者（教師甲）、教師乙（國中數學教師，教學年資27年）、教師丙（國中數學教師，教學年資12年）在試題編碼的一致性。由編碼者一致性的KAPPA係數可見兩兩間均顯示高度正相關。附錄表3為四卷的共同題相關係數，附錄表4為三位編碼者認知成分編碼狀況。由編碼者一致性的KAPPA係數與共同題的Pearson係數，均顯示高度正相關，對試題的分析與認知成份的編碼均有支持。

表 9

代數試題難度分布

難度值	題目認知能力應用	題號
1.0~2.0	A13--應用比例的概念，產生二元一次方程式來解決求線段比例的問題。	<u>A13</u>
	A18--應用一元二次方程式配方法的概念來解決一元二次方程式求解問題。	<u>A18</u> C6
	D17--利用兩種比例概念來產生二元一次方程式進而解決生活中比例應用問題。	<u>D17</u>
0.0~1.0	D16--利用等差級數和的公式，產生一元一次方程式來解決等差級數中未知數求解的問題。	<u>D16</u> A11 C18 <u>B17</u> C12
	B17--應用未知數假設與比例概念產生一元一次方程式來解決生活中未知數的應用問題。	B18 C15 C17 D12 D18 A7 A14 A15 A16 E5 B14
	C14--利用直線方程式的解產生與兩座標軸交點的概念，並配合圖形來解決坐標平面上的不等式問題。	B12 D7 <u>C14</u> A11 A17 B7 C11
-1.0~0.0	A6--利用文字敘述假設直線方程式，透過解二元一次聯立方程式來解決兩直線方程式求交點的問題。	<u>A6</u> A8 E2 C8 D15 B6 B16 C16
	A2--應用坐標概念了解數的大小，產生正、負數來解決坐標平面象限判斷的問題。	A12 E3 B4 C13 <u>A2</u> B13 B15 C7 D13
	D6--應用多項式的四則運算，來解決一元一次不等式的問題。	A3 E1 B8 D8 D14 <u>D6</u> C3
-2.0~-1.0	D11--利用假設未知數，以解一元一次方程式的能力，來解決求紙片面積大小的問題。	<u>D11</u> B11
	B1--利用代入消去法來解決二元一次聯立方程式求解的問題。	<u>B1</u> C2 A4
	D4--利用加減消去法來解決二元一次聯立方程式求解的問題。	<u>D4</u> B2 B3 D2
-3.0~-2.0	D3--利用題目提供的直線方程式，來解決兩直線在坐標平面上圖形判斷的問題。	<u>D3</u> C4 D1
	A1--應用未知數概念產生四則運算來解決二元一次方程式求解的問題。	<u>A1</u> C1

表 10

編碼者認知成分編碼一致性 (題數= 65)

認知成份 KAPPA 係數		乙	丙
數的種類	甲	.95**	.97**
	乙		.92**
表徵轉化	甲	.81**	.91**
	乙		.86**
運算複雜度	甲	.68**	.75**
	乙		.92**
方程式資訊	甲	.86**	.90**
	乙		.95**

** $p < .01$

二、試題難度參數與認知成分的相關

表11呈現代數測驗試題難度參數與認知成分的相關。整體而言，除了數的種類之外，表徵轉化、運算複雜度與方程式資訊等三個成分與難度參數間均存在極高的相關，其中以方程式資訊和試題難度參數的相關最高，大約有52%的難度預測力，可解釋大部份試題難度參數的變異。

此外，在成分間的相關部分，數的種類與運算複雜度相關為0.62，可能造成在對試題難度解釋的過程中，數的種類會被運算複雜度解釋。表徵轉化與方程式資訊之間為0.47。但是，表徵轉化與運算複雜度及數的種類均呈現負相關，分別為-0.52與-0.44。主要原因為基本學力測驗與教育會考試題主要設計目的在考驗國中生學習之基本能力(宋曜廷、周業太、曾芬蘭，2014)。所以就試題而言，對學生在表徵轉化程度與運算能力程度上，屬於不同類型試題的測驗。

在針對試題難度值進行多元逐步迴歸分析結果呈現於表12及表13，結果顯示方程式資訊、運算複雜度和表徵轉化三個成分與試題難度參數的相關達0.90，可共同解釋難度的變異達82%。然而，第一個成分數的種類卻未能如預期進入迴歸預測模式，無法有效的解釋試題難度。對難度預測力的係數，方程式資訊為0.34、運算複雜度為0.92、表徵轉化為0.78。相對應的標準化係數分別為0.37、0.84、0.66。其中運算複雜度的標準化迴歸係數最大，可見運算複雜度每增加1單位，對於試題難度值將提昇0.84個單位。

本研究依據所選定的認知成分對基本學力測驗與教育會考之代數試題難度的解釋力達到82%，但數的種類尚未能提供有效、獨立的試題難度解釋力。檢視試題數的種類成分編碼操作性定義，發現本研究中大部分試題的數的種類負荷偏低，因此，與運算複雜度的重疊過高。後續修訂須進一步檢視數的種類之操作性定義，讓數的種類與運算複雜度合理脫鉤，或微幅擴大試題數的種類的變異，確認數的種類之獨立性。

表 11

試題難度與各認知成分相關矩陣 (題數= 65)

	數的種類 C1	表徵轉化 C2	運算複雜度 C3	方程式資訊 C4
試題難度 b	.17	.40*	.43**	.52**
數的種類 C1		-.44**	.62**	.04
表徵轉化 C2			-.52**	.47**
運算複雜度 C3				-.19

* $p < .05$, ** $p < .01$

表 12

認知成分對代數題庫試題參數多元迴歸結果摘要 (題數= 65)

	認知成分	R	R ²	R ² 改變量	R ² 改變量之 F 值	顯著性
模型 1	方程式資訊	.52	.27	.27	23.53	.000
模型 2	方程式資訊 運算複雜度	.75	.56	.29	40.62	.000
模型 3	方程式資訊 運算複雜度 表徵轉化	.90	.82	.26	86.03	.000

表 13

認知成分對代數題庫難度參數多元迴歸預測分析摘要 (題數= 65)

預測變項	未標準化係數		標準化係數	t 值
	B 之估計值	標準誤差	Beta(β)	
截距	-2.46	.14		
方程式資訊	.34	.06	.37	5.91**
運算複雜度	.92	.07	.84	13.13**
表徵轉化	.78	.08	.66	9.28**

** $p < .01$

伍、結論與建議

本研究依據文獻探究的結果對代數測驗提出四項認知成分，分別為數的種類、表徵轉化、運算複雜度與方程式資訊，並以實徵的反應資料進行試題難度參數估計。透過對難度參數的多元迴歸分析發現，方程式資訊、運算複雜度與表徵轉化等三項成分可有效共同解釋82%的試題難度參數變異，其標準化迴歸係數分別為0.37、0.84、0.66。也就是說每增加方程式資訊認知成分一個單位，對試題難度參數大致會提升0.37單位左右；每增加運算複雜度認知成份一個單位，對試題難度參數大致會提升0.84單位左右；而每增加表徵轉化認知成分一個單位，對試題難度參數大致會提升0.66個單位左右。然而，數的種類與運算複雜度對試題難度值的預測力有些重疊，宜進一步調整操作性定義，或考慮刪除該成分。此外，數的種類無法進入迴歸方程式中，也有可能是試題取樣上的限制，無法使數的種類在排除運算複雜度對難度的相關後仍有顯著的影響存在，而並非數的種類成分定義的問題，未來或許可透過擴充更多其他代數題目來解決。

此外，在三個認知成分中，又以運算複雜度的迴歸係數最大，顯見本代數測驗中，

運算複雜度明顯決定試題難度參數的大小。而運算複雜度認知成分在迴歸預測分析中對試題難度的標準化係數達0.84，更顯示運算複雜度認知成分定義的客觀清晰，是判斷學生代數學習狀況與提升學習成效的重要成分。本研究提出的運算複雜度認知成分定義主要為學生在運算代數試題中如何進行算式化簡，亦即學生如何運用代數的四則運算、因式分解與配方法進行算式整理，進而求得算式解的過程。顯示學生在此認知成分的熟練與否，將影響其代數試題運算正確度甚鉅。綜合以上分析，若教師在教材準備與提升學生學習部分，可特別針對具備運算複雜度認知成分的代數試題進行整理，對於提升學生代數試題運算正確度將有明顯助益。

本研究所提出認知成分依據教育部九年一貫課程數學學習領域能力指標及認知成分操作定義，初步研究結果能合理呈現國中九年級學生數學學習狀況，運算複雜度、表徵轉化及方程式資訊三成分已能達到解釋力大於80%。顯示成分分析有利試題主要難度變異來源的掌握與操弄。後續研究將進一步檢視數的種類成分，微調試題計算量的變異，並更具代表性樣本進行試題難度參數資料蒐集，交叉檢核模式的試用性。本研究模式依據國民中學數學能力指標與學習內容規畫的邏輯和認知分析實徵文獻統整而成，所提出的內涵成份大致符合專業共識，模式中實務操作的建議性標準（如成分數與解釋力的同時斟酌）可提供未來國民中學教師進行代數教學與學生學習提升的實徵參考。

參考文獻

一、中文部份

- 宋曜廷、周業太、曾芬蘭（2014）。十二年國民基本教育的入學考試與評量變革。**教育科學研究期刊**，**59**（1），1-32。
- 林曉芳、余民寧（2001）。國中生在數學代數概念學習之評量研究－以二元一次方程式為例。**教育與心理研究**，**24**（2），303-326。
- 洪碧霞、林素微、林娟如（2006）。認知複雜度分析架構對TASA-MAT六年級線上測驗試題難度的解釋力。**教育研究與發展期刊**，**2**（4），69-85。
- 洪碧霞、蕭嘉偉、林素微（2010）。PISA數學素養認知成份分析對補救教學的意涵。**課程與教學季刊**，**13**（1），47-66。
- 洪碧霞、蕭嘉偉、楊佩馨（2008）。從認知負荷觀點分析國小二至四年級數與計算成就測驗。**教育研究與發展期刊**，**4**（4），151-168。
- 孫慧茹、洪碧霞（2013）。國民小學代數動態評量的發展與應用。**數位學習科技期刊**，**5**（2），59-82。
- 徐偉民、曾于珏（2013）。臺灣、芬蘭、新加坡國小數學教科書代數教材之比較。**教科書研究**，**6**（2），69-103。
- 教育部（2003）。**國民中小學九年一貫課程綱要**。臺北：作者。
- 郭汾派、林光賢、林福來（1989）。**國中生文字符號概念的發展**。國科會專題研究計畫報告（NSC77-0111-S004-001-A）。

- 陳彥廷、柳賢（2009）。國中數學教學融入提問的引導策略促進代數式中文字符號之語意理解之建構。《科學教育學刊》，**17**（3），203-231。
- 陳嘉皇（2007）。國小三年級學童代數推理教學與解題表現研究。《高雄師大學報》，**23**，125-150。
- 陳嘉皇、梁淑坤（2014）。表徵與國小學生代數思考之初探性研究。《教育研究集刊》，**60**（2），1-40。
- 楊德清、陳仁輝（2010）。臺灣、美國和新加坡七年級代數教材之比較研究。《科學教育學刊》，**18**（1），43-61。
- 劉家樟、楊凱琳、許慧玉（2012）。小六學生不同代數表徵的解題表現、教師布題順序與代數教學信念之研究。《當代教育研究季刊》，**20**（2），93-133。
- 顏錦偉（2016）。不同程度國中生代數解題之研究（未出版博士論文）。國立高雄師範大學，高雄市。
- 蘇義翔、洪碧霞（2015）。基於認知成分之代數推理測驗自動化命題模式之發展。《人文社會學報》，**11**（2），133-162。

二、西文部分

- Bejar, I. I. (2013). Item generation: implications for a validity argument. In M. J. Gierl & T. M. Haladyna (Eds.), *Automatic Item Generation: Theory and Practice* (pp. 40-55). New York, NY: Routledge.
- Chen, Y. H., Macdonald, G. & Leu, Y. C. (2011). Validating cognitive sources of mathematics item difficulty: Application of the LLTM to fraction conceptual items. *The International Journal of Educational and Psychological Assessment*, *7*(2), 74-93.
- Cirino, P. T., Tolar, T. D., & Fuchs, L. S. (2013). *Arithmetic and cognitive contributions to algebra*. Society for Research on Educational Effectiveness, 2040 Sheridan Road, Evanston, IL 60208. Retrieved from ERIC <https://search.proquest.com/docview/1773213671?accountid=14224>
- Collis, K. F. & University of Newcastle (N.S.W.). (1975). *The development of formal reasoning*. Newcastle, N.S.W: University of Newcastle.
- Embretson, S. E., & Daniel, R. C. (2008). Understanding and quantifying cognitive complexity level in mathematical problem solving items. *Psychology Science Quarterly*, *50*(3), 328-344.
- Hung, P. H., Hwang, G. J., Lee, Y. H., & Su, I. H. (2012). A cognitive component analysis approach for developing game-based spatial learning tools. *Computers & Education*, *59*(2), 762-773.
- Janssen, R. (2010). Modeling the effect of item designs within the Rasch model. In S. E. Embretson (Ed.), *Measuring psychological constructs: Advances in model-based approaches* (pp. 227-245). Washington, DC: American Psychological Association.
- Lesh, R. (1981). Applied mathematical problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 235-264.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

投稿日期：2019年01月03日

修正日期：2019年03月28日

接受日期：2019年03月29日

Exploring the Difficulty of Junior High School Algebra Test Questions from the Perspective of Cognitive Load

Chih-Wei Hou

Principal, Tainan Municipal Jhongsiao Junior High School

Pi-Hsia Hung

Professor, Department of Education, National University of Tainan

Su-Wei Lin

Professor, Department of Education, National University of Tainan

ABSTRACT

This study analyzes the explanatory power of cognitive components for the difficulty of national algebra test items. According to four cognitive components including the type of number, representation transformation, computational complexity, and equation information, a total of 65 algebra test items were drawn from the Basic Competence Test and the Comprehensive Assessment Program for Junior High School Students administered in Taiwan over the past ten years. A total of 982 students in the ninth grade were tested. The Rasch model is used to adjust the difficulty parameters, and the multivariate regression is used to predict and analyze the difficulty parameters of the test components. The results show that representation transformation, computational complexity, and equation information explain the difficulty parameter of the test items by about 82%. The initial trial indicates that the proposed algebraic cognitive components provide a reasonable explanation for the difficulty of the test items. Researchers and teachers can apply these components as the basis for algebra teaching and the testing design and planning for the supplementary algebra learning materials.

Keywords: algebra test, cognitive component, parameter of test difficulty, regression analysis

附錄表 1

代數測驗認知成分編碼及認知負荷層次

題號	數的種類	表徵轉化	運算複雜度	方程式資訊	成分總和	負荷層次
A1	0	0	0	1	1	一
A2	2	2	0	1	5	二
A3	2	1	1	2	6	二
A4	3	0	1	1	5	二
A6	2	1	1	2	6	二
A7	1	0	2	1	4	一
A8	2	1	1	3	7	三
A11	3	1	1	3	8	三
A12	3	0	2	1	6	二
A13	2	2	1	3	8	三
A14	2	2	1	3	8	三
A15	2	2	1	3	8	三
A16	2	2	1	3	8	三
A17	3	0	3	1	7	三
A18	3	0	3	1	7	三
B1	2	0	1	1	4	一
B2	2	1	0	1	4	一
B3	2	0	1	1	4	一
B4	3	0	2	1	6	二
B6	2	1	0	3	6	二
B7	3	1	2	1	7	三
B8	3	1	1	1	6	二
B11	2	0	1	0	3	一
B12	2	2	0	3	7	三
B13	0	2	0	0	2	一
B14	0	2	0	3	5	二
B15	0	2	0	0	2	一
B16	1	0	2	0	3	一
B17	2	1	1	3	7	三
B18	3	0	3	1	7	三
C1	2	0	0	1	3	一
C2	3	0	1	1	5	二
C3	0	2	0	0	2	一
C4	2	0	1	1	4	一
C6	2	0	2	3	7	三
C7	3	0	2	1	6	二
C8	3	0	2	1	6	二
C11	2	1	1	2	6	二
C12	2	2	1	3	8	三
C13	2	2	0	2	6	二
C14	2	2	1	1	6	二
C15	3	0	3	1	7	三
C16	0	2	0	3	5	二
C17	3	0	3	1	7	三
C18	2	2	1	3	8	三

附錄表 1 (續)

代數測驗認知成分編碼及認知負荷層次

題號	數的種類	表徵轉化	運算複雜度	方程式資訊	成分總和	負荷層次
D1	2	0	0	1	3	一
D2	2	0	1	1	4	一
D3	2	0	0	1	3	一
D4	2	0	1	1	4	一
D6	2	0	1	1	4	一
D7	2	1	1	3	7	三
D8	0	1	1	0	2	一
D11	2	1	0	3	6	二
D12	3	0	2	2	7	三
D13	2	1	1	0	4	一
D14	3	0	2	1	6	二
D15	3	0	2	1	6	二
D16	2	1	1	3	7	三
D17	2	2	1	3	8	三
D18	2	1	1	3	7	三
E1	2	0	1	0	3	一
E2	3	0	3	1	7	三
E3	2	1	1	2	6	二
E4	2	1	1	3	7	三
E5	3	1	2	1	7	三

註：

1. 測驗分為 A、B、C、D 四卷，其中 A1 為 A 卷第 1 題。
2. 共同題為 E1 至 E5。其中 E1 為每卷第 5 題，E2 為每卷第 9 題，E3 為每卷第 10 題，E4 為每卷第 19 題，E5 為每卷第 20 題。

附錄表 2

代數測驗答對率、鑑別度、點二系列相關、CTT 試題難度表

題號	答對率	鑑別度	點二相關	CTT 試題難度
A1	.90	.25	.34	-2.55
A2	.60	.45	.36	-0.51
A3	.61	.59	.53	-0.57
A4	.78	.43	.46	-1.54
A6	.51	.68	.55	-0.08
A7	.40	.56	.51	0.47
A8	.52	.55	.49	-0.12
A11	.46	.55	.45	0.19
A12	.56	.70	.60	-0.32
A13	.21	.38	.40	1.56
A14	.40	.25	.23	0.50
A15	.40	.50	.46	0.48
A16	.41	.39	.33	0.41
A17	.45	.48	.37	0.23
A18	.28	.39	.39	1.16
B1	.71	.60	.51	-1.25
B2	.77	.50	.45	-1.63
B3	.78	.56	.53	-1.69
B4	.54	.61	.50	-0.31
B6	.50	.75	.61	-0.15
B7	.44	.73	.57	0.19
B8	.58	.62	.52	-0.54
B11	.69	.63	.57	-1.13
B12	.40	.65	.53	0.38

附錄表 2 (續)

代數測驗答對率、鑑別度、點二相關、CTT 試題難度表

題號	答對率	鑑別度	點二相關	CTT 試題難度
B13	.58	.64	.53	-0.52
B14	.39	.46	.44	0.47
B15	.56	.52	.44	-0.42
B16	.52	.64	.55	-0.21
B17	.33	.41	.37	0.76
B18	.37	.35	.36	0.55
C1	.91	.27	.44	-2.61
C2	.76	.45	.46	-1.32
C3	.67	.46	.44	-0.83
C4	.87	.32	.45	-2.24
C6	.31	.39	.40	1.10
C7	.61	.68	.59	-0.46
C8	.53	.48	.41	-0.10
C11	.49	.73	.59	0.13
C12	.37	.51	.48	0.71
C13	.59	.65	.53	-0.36
C14	.48	.70	.55	0.17
C15	.41	.56	.44	0.53
C16	.56	.46	.40	-0.23
C17	.39	.24	.24	0.61
C18	.34	.30	.32	0.87
D1	.86	.39	.44	-2.24
D2	.79	.57	.58	-1.70
D3	.83	.38	.43	-2.04
D4	.79	.56	.53	-1.67
D6	.64	.71	.56	-0.76
D7	.43	.66	.57	0.34
D8	.61	.60	.46	-0.59
D11	.67	.59	.48	-0.94
D12	.38	.62	.52	0.65
D13	.59	.71	.55	-0.50
D14	.61	.60	.53	-0.57
D15	.50	.77	.64	-0.03
D16	.34	.65	.53	0.88
D17	.32	.50	.46	1.01
D18	.38	.51	.41	0.65
E1	.62	.67	.58	-0.64
E2	.52	.84	.67	-0.17
E3	.56	.83	.67	-0.33
E4	.32	.66	.58	0.92
E5	.42	.72	.59	0.40

附錄表 3

國中代數測驗共同題相關 (題數= 5)

	卷 B	卷 C	卷 D
卷 A	.96**	.97**	.96**
卷 B		.96**	.87*
卷 C			.90*

* $p < .05$, ** $p < .01$

附錄表 4
三位編碼者認知成分編碼表

題號	教師甲				教師乙				教師丙			
	C1	C2	C3	C4	C1	C2	C3	C4	C1	C2	C3	C4
A1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1
A2	2	2	0	1	2	2	0	1	2	2	0	1
A3	2	1	1	2	2	1	1	3	2	1	1	2
A4	2	0	1	1	3	0	1	1	3	0	1	1
A6	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2
A7	1	0	2	1	1	0	2	1	1	0	2	1
A8	2	1	0	3	2	1	1	3	2	1	1	3
A11	1	1	1	3	3	1	1	3	3	1	1	3
A12	3	0	2	1	3	0	2	1	3	0	2	1
A13	2	2	1	3	2	2	1	3	2	2	1	3
A14	2	2	0	3	2	1	1	3	2	2	1	3
A15	2	2	0	3	2	2	1	3	2	2	1	3
A16	2	2	0	3	2	1	1	3	2	2	1	3
A17	3	0	3	1	3	0	3	1	3	0	3	1
A18	3	0	3	1	3	0	3	1	3	0	3	1
B1	2	0	1	1	2	0	1	1	2	0	1	1
B2	2	1	0	1	2	1	0	1	2	1	0	1
B3	2	0	1	1	2	0	1	1	2	0	1	1
B4	3	0	2	1	3	0	1	1	3	0	2	1
B6	2	1	0	3	2	1	0	1	2	1	0	3
B7	3	1	2	1	3	1	2	1	3	1	2	1
B8	3	1	1	1	3	1	1	1	3	1	1	1
B11	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0
B12	2	2	0	3	2	2	0	3	2	2	0	3
B13	0	2	0	0	0	2	0	0	0	2	0	0
B14	0	2	0	3	0	2	0	3	0	2	0	3
B15	0	2	0	3	0	2	0	0	0	2	0	0
B16	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0
B17	2	1	1	3	2	1	1	3	2	1	1	3
B18	3	0	3	1	3	0	3	1	3	0	3	1
C1	2	0	0	1	2	0	1	1	2	0	1	1
C2	3	0	1	1	3	0	1	1	3	0	1	1
C3	0	2	0	2	0	2	0	0	0	2	0	0
C4	2	0	1	1	2	0	1	1	2	0	1	1
C6	2	0	2	3	2	0	1	3	2	0	2	3
C7	3	0	2	1	3	0	2	1	3	0	2	1
C8	3	0	2	1	3	0	2	1	3	0	2	1
C11	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2
C12	2	2	1	3	2	2	1	3	2	2	1	3
C13	2	2	0	2	2	2	1	3	2	2	1	3
C14	2	2	1	1	2	2	0	1	2	2	0	1
C15	3	0	3	1	3	0	3	1	3	0	3	1
C16	0	2	0	3	0	2	1	3	0	2	1	3
C17	3	0	3	1	3	1	3	1	3	0	3	1
C18	2	2	1	3	2	2	1	3	2	2	1	3
D1	2	0	0	1	2	0	1	1	2	0	1	1
D2	2	0	1	1	2	0	1	1	2	0	1	1
D3	2	0	0	1	2	0	0	1	2	0	0	1
D4	2	0	1	1	2	0	1	1	2	0	1	1
D6	2	0	1	1	2	0	1	1	2	0	1	1
D7	2	1	1	3	2	1	1	3	2	1	1	3
D8	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0
D11	2	1	0	3	2	2	1	3	2	2	1	3
D12	3	1	2	1	3	0	1	2	3	0	2	2
D13	2	1	1	0	2	0	1	0	2	1	1	0

附錄表 4 (續)

三位編碼者認知成分編碼表

題號	教師甲				教師乙				教師丙			
	C1	C2	C3	C4	C1	C2	C3	C4	C1	C2	C3	C4
D14	3	0	2	1	3	0	2	1	3	0	2	1
D15	3	0	2	1	3	0	2	1	3	0	2	1
D16	2	1	1	3	2	1	1	3	2	1	1	3
D17	2	2	1	3	2	1	1	3	2	1	1	3
D18	2	1	1	3	2	1	1	3	2	1	1	3
E1	2	2	0	0	2	0	1	0	2	2	1	0
E2	3	0	3	1	3	0	3	1	3	0	3	1
E3	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2
E4	2	1	1	3	2	1	1	3	2	1	1	3
E5	3	1	2	1	3	1	2	1	3	1	2	1

